

# *TROIS MODELES DE STRUCTURE PAR TERME DES PRIX DU PETROLE : UNE COMPARAISON<sup>1</sup>*

Delphine LAUTIER

CAHIER DE RECHERCHE DU CEREG N°9907, SEPT 1999

## RESUME<sup>2</sup> :

*La présentation de la théorie du stockage et de la notion de convenience yield permet d'exposer les fondements théoriques des modèles de structure par terme des prix des commodités. Ces derniers peuvent être utilisés pour réaliser des opérations de couverture ou dans le cadre de stratégies d'investissement (section 2). Trois modèles de structure par terme des prix des commodités sont ensuite présentés. Chacun repose sur une hypothèse différente quant au comportement dynamique du convenience yield : celui-ci est successivement supposé constant, avoir un comportement de retour vers une valeur moyenne, ou un comportement asymétrique (section 3). Les simulations réalisées à partir de ces modèles montrent que l'introduction d'une seconde variable d'état accroît le réalisme du modèle. Par ailleurs, elles permettent de souligner deux difficultés associées à l'application de ces modèles : les variables d'état auxquelles ils se réfèrent ne sont pas observables, et le nombre de paramètres à estimer est conséquent (section 4).*

MOTS CLES : théorie du stockage – *convenience yield* – modèles stochastiques – marchés complets – simulation.

## SECTION 1 : INTRODUCTION

Avec le développement des marchés à terme de commodités, et l'augmentation de la durée des contrats négociés sur ces marchés, de nouvelles applications sont envisagées, depuis le début des années 1990, par les opérateurs du marché pétrolier : l'affaire Metallgesellschaft, en premier lieu, a suscité des interrogations concernant la possibilité de couvrir des engagements à long terme sur le marché physique à partir de contrats à terme d'échéance rapprochée. De plus, dans la mesure où un prix à terme

---

<sup>1</sup> Cet article a été présenté au Séminaire International Francophone de Finance (SIFF), à Louvain La Neuve, le 10 septembre 1999.

<sup>2</sup> Je remercie pour leur aide Alain Galli (Centre de Géostatistique de l'Ecole des Mines de Paris), Hélyette Geman, Yves Simon et Pierre-Noël Giraud, Professeurs à l'Université Paris IX, et Sophie Coutant, doctorante au Cereg, Université Paris IX. Ces travaux n'engagent que leur auteur.

représente l'anticipation, compte tenu de l'information disponible aujourd'hui, du prix au comptant futur, l'utilisation des prix à terme pour valoriser les *cash flows* futurs est également envisagée dans le cadre de stratégies d'investissement.

Dans cet objectif, un modèle permettant de représenter la structure par terme des prix pour n'importe quelle échéance, y compris celles non proposées par le marché, est développé. Sur le marché pétrolier, la structure par terme des prix ne s'étend pas au-delà de trois ans<sup>3</sup>. Pour réaliser des opérations à plus long terme, il est donc nécessaire de pouvoir « prolonger » cette courbe.

La construction d'un tel outil requiert, en premier lieu, la compréhension des mécanismes de formation des prix à terme dans un marché de commodités. La première section de cet article est donc consacrée à l'étude de relations entre prix au comptant et prix à terme, à travers la théorie du stockage et la notion de *convenience yield*. Ces dernières constituent le support théorique de l'élaboration des modèles de structure par terme des prix des commodités. Trois modèles différents sont ensuite présentés et comparés. Chacun repose sur une hypothèse spécifique quant au comportement dynamique du *convenience yield*. Des simulations permettent de se forger une opinion sur le caractère plus ou moins réaliste des structures par terme des prix obtenues, et de mettre en évidence les difficultés théoriques et pratiques que soulève l'élaboration de tels modèles.

## SECTION 2 : LA RELATION ENTRE PRIX A TERME ET PRIX AU COMPTANT DANS UN MARCHE DE COMMODITES.

Un prix à terme est un prix établi aujourd'hui pour une livraison future. Parallèlement, un prix au comptant représente la somme à payer pour disposer de la marchandise immédiatement. La base, définie comme la différence entre prix à terme et prix au comptant, peut être positive ou négative : dans le premier cas, les prix sont en report (*contango*) ; dans le second, ils sont en déport (*backwardation*).

Deux théories complémentaires proposent une interprétation du sens et du comportement de la base : la théorie du déport normal l'explique à partir de l'équilibre des positions de couverture des opérateurs sur le marché à terme ; la théorie du stockage

est centrée sur l'analyse des motifs de détention des stocks des opérateurs du marché physique et sur les coûts de stockage. Ces deux théories, formulées pour l'essentiel entre 1930 et 1958, sont encore l'objet de nombreuses recherches. Dans ce texte, une place privilégiée est accordée à la théorie du stockage (2.1), et à la notion de *convenience yield* (2.2), car elles constituent le principal support théorique permettant l'élaboration de modèles de structure par terme des prix.

## *2.1. L'explication des situations de report et de déport*

L'étude des opérations d'arbitrage réalisées par les opérateurs entre marché physique et marché papier permet en premier lieu de comprendre les mécanismes sous-tendant l'apparition de situations de report et de déport<sup>4</sup>. Elle conduit à mettre en évidence le fait que la base évolue de façon différente lorsqu'elle est positive ou négative (2.1.1). La présence de stocks dans le marché physique permet d'analyser simplement les situations de report. Celles-ci apparaissent lorsque les stocks sont abondants (2.1.2). L'explication des situations de déport, qui surviennent en cas de pénurie, est en revanche plus délicate (2.1.3.). Elle est fondée sur la notion de *convenience yield*.

### **2.1.1 Les relations d'arbitrage entre marché physique et marché à terme**

L'analyse des relations d'arbitrage entre marché physique et marché papier permet de comprendre que le niveau du report, sur un marché à terme de commodités, est limité au coût de stockage de la marchandise entre la date courante et celle d'échéance du contrat, alors que ce n'est pas le cas pour le niveau du déport.

En présence de stocks en surplus, les prix ne peuvent être en déport. Si tel était le cas, il deviendrait rentable et non risqué de vendre les stocks sur le marché au

---

<sup>3</sup> La commercialisation de contrats à terme pour des échéances allant jusqu'à 87 mois est prévue par le Nymex.

<sup>4</sup> Lorsque le prix au comptant est inférieur au prix à terme, le marché est en report (contengo). Inversement, lorsque le prix au comptant est supérieur au prix à terme, le marché est en déport (backwardation).

comptant, et simultanément de les racheter à terme<sup>5</sup>. La multiplication de ces opérations d'arbitrage conduirait à une baisse du prix au comptant sous l'effet des ventes massives de stocks physiques, et simultanément à une hausse du prix à terme suite aux achats de contrats. Les opérations d'arbitrage ne cesseraient que lorsque le prix à terme serait supérieur au prix au comptant, d'un montant représentant le coût de stockage. L'existence de stocks en surplus conduit ainsi à une situation de report : la base, définie comme la différence entre prix à terme et prix au comptant, est positive.

Le niveau du report ne peut pas se maintenir longtemps à un niveau supérieur à celui des coûts de stockage. Si une telle situation se produisait, des opérations d'arbitrage inverses à celles évoquées précédemment rétabliraient l'équilibre, car il deviendrait rentable d'acheter des stocks sur le marché au comptant, de les conserver, et, simultanément, de les vendre à terme<sup>6</sup>. La vente de contrats entraînerait une baisse des prix à terme, le prix au comptant augmenterait sous l'effet des achats de stocks physiques, et les opportunités d'arbitrage disparaîtraient.

Les opérations de *reverse cash and carry*, réalisées lorsque les stocks sont excédentaires, deviennent improbables s'ils sont peu élevés, et ce d'autant plus que la pénurie est prononcée : les opérateurs n'ont en effet aucun intérêt à se défaire de leurs stocks tant qu'ils anticipent une hausse supplémentaire du prix au comptant. Le niveau du déport n'est pas, comme c'est le cas pour le report, limité par les opérations d'arbitrage. Alors que la borne supérieure du report est fixée objectivement par le coût de stockage, celle du déport est déterminée uniquement par le prix maximal que les acheteurs sont prêts à payer pour obtenir la marchandise.

### **2.1.2. Le report**

Dès 1930, Keynes<sup>7</sup> explique les situations de report sur les marchés à terme de commodités par la présence de stocks. Ceci le conduit à préciser quels sont les stocks à prendre en considération dans l'analyse et ce que représente le coût du stockage.

---

<sup>5</sup> Opération de *reverse cash and carry*.

<sup>6</sup> Opération de *cash and carry*.

<sup>7</sup> J.M. Keynes, 1930, « *Treatise on Money* », Macmillan, Londres, volume 2.

Les stocks à l'origine des situations de report sont des stocks en surplus (*redundant stocks*), constitués suite à une erreur d'appréciation. Ils sont nommés ainsi par opposition aux stocks opérationnels (*working capital*) regroupant les stocks en voie d'acheminement, les stocks permettant de réaliser des ajustements saisonniers, et les stocks de sécurité assurant la continuité de la production. Les stocks en surplus permettent rarement d'assurer plus de quelques mois de consommation future. Dès qu'ils apparaissent, des mécanismes visant à leur élimination sont mis en œuvre : le prix des marchandises diminue jusqu'à ce que l'augmentation de la consommation ou la diminution de la production soit suffisante pour les absorber.

Les coûts de stockage (*costs of carrying, carrying charges*) changent beaucoup en fonction de la commodité considérée. Ils sont composés de différents éléments, d'importance variable, tels que les frais de détérioration et d'obsolescence, les frais et primes d'assurances liés à l'entreposage, les frais financiers, le risque de variation de la valeur monétaire des produits... Tant que les capacités de stockage ne sont pas saturées, les coûts de stockage sont stables. Par conséquent, le niveau du report l'est également<sup>8</sup>.

### **2.1.3. Le déport**

La théorie des coûts de stockage, énoncée à l'origine dans le contexte de stocks en surplus, ne permet pas, a priori, d'expliquer la relation entre prix à terme et prix au comptant lorsque les stocks, loin d'être pléthoriques, deviennent rares. En effet, si le prix à terme est égal au prix au comptant augmenté de coûts de stockage positifs, comment peut-il devenir inférieur au prix au comptant ? De plus, si le prix à terme comprend effectivement le coût de stockage de la marchandise, un opérateur détenant des stocks, s'il vend à terme sa marchandise en situation de report, n'a pas à supporter le coût de stockage. Comment alors expliquer qu'en situation de déport, des stocks sont détenus sans être couverts par une vente à terme, alors même que cette opération est

---

<sup>8</sup> Dans le marché pétrolier, lorsque les capacités de stockage à terre sont parvenues à saturation, le pétrole est stocké en mer. Ce mode d'entreposage étant nettement plus coûteux que le précédent, le niveau de report peut connaître deux paliers : le premier est déterminé par les coûts de stockage à terre, le second par les coûts de stockage en mer.

coûteuse ? La notion de *convenience yield*, introduite par Kaldor (1939)<sup>9</sup>, apporte une réponse à ces différentes questions.

Le *convenience yield* est défini par cet auteur comme le bénéfice qu'un producteur retire de ses stocks s'il dispose de marchandises dès qu'il en a besoin, sans avoir à supporter le coût associé à des commandes fréquentes, ni celui lié à l'attente des livraisons. Ce bénéfice est celui de la disponibilité : il représente le « confort » (*convenience*) associé à la détention de stocks, d'autant plus apprécié que le niveau des stocks est faible.

Bien que cette définition ait ensuite évolué, le rôle du *convenience yield* dans l'interprétation de la relation entre prix au comptant et prix à terme n'a pas changé : ce dernier permet d'expliquer le fait que le prix au comptant puisse devenir supérieur au prix à terme. Lorsque le marché se trouve en situation de pénurie, suite par exemple à une augmentation inattendue de la demande, le *convenience yield* peut en effet devenir supérieur au coût de stockage, et une situation de déport peut s'instaurer.

## 2.2. La notion de *convenience yield*

Une grande partie des travaux réalisés dans le cadre de la théorie du stockage a été consacrée à la définition et à l'étude du *convenience yield*. Une synthèse de ces travaux permet de proposer une définition exhaustive du *convenience yield*, et une formulation de la relation entre prix au comptant et prix à terme dans un marché de commodités.

### 2.2.1. Revue de la littérature

Pour Kaldor (1939), à l'origine du terme *convenience yield*, la détention de stocks en situation de déport permet de répondre à la demande sans supporter de délais de livraison. Brennan (1958) complète cette analyse : pour lui, les stocks sont détenus parce qu'ils permettent de répondre à une demande imprévue sans supporter le coût de l'attente de l'approvisionnement. L'auteur souligne que l'éloignement des lieux de

---

<sup>9</sup>N. Kaldor, 1939-40 : « Speculation and economic stability », *Review of Economic Studies*, VII, 3.

production et de consommation ne présente une contrainte que si la demande future est incertaine. Dans ce contexte, la rigidité des activités industrielles et commerciales, associée à l'incertitude concernant le niveau de la demande future, est une incitation à la détention de stocks en situation de déport.

D'autres auteurs ont analysé la rigidité se manifestant par la présence de coûts fixes élevés dans l'activité industrielle et commerciale et son impact sur le comportement de stockage des opérateurs. Pour Working (1949), la détention de stocks en situation de déport est expliquée par la présence de coûts fixes élevés dans l'activité de stockage. A travers la notion de rendement de réserve<sup>10</sup>, Weymar (1968) invoque à son tour la présence de coûts fixes élevés dans les activités de production et de transformation.

Dans ce contexte, si des stocks sont détenus en situation de déport, c'est parce que les capacités de production, de stockage, de transport et de transformation ne sont pas adaptées au niveau de l'activité : il y a surcapacité. Cela peut s'expliquer soit par le caractère saisonnier des commodités, auquel cas la surcapacité n'est que momentanée, soit par une erreur d'appréciation du niveau d'activité lors de la construction des capacités. Cette prévision est d'autant plus délicate que l'offre et la demande sont fluctuantes et que le délai de constitution des capacités est important. Dans le premier cas invoqué, la rigidité des activités de production, de transformation et de stockage permet à elle seule de comprendre la détention de stocks en situation de déport. Dans le second cas, cette rigidité est associée à l'incertitude affectant le niveau de l'offre et de la demande futures.

Enfin, Williams et Wright (1989) proposent une explication plus exhaustive encore : pour ces deux auteurs, face à l'incertitude affectant à la fois l'offre et la demande future, si les opérateurs détiennent des stocks en situation de déport, c'est parce que, compte tenu des possibilités présentes et futures d'allocation de ces stocks, cela reste le meilleur moyen de minimiser leurs coûts de transformation (les coûts de

---

<sup>10</sup> Le rendement de réserve des stocks est lié pour un transformateur à la nécessité d'assurer la continuité de sa production. S'engager dans une activité de transformation de commodités nécessite de réaliser des investissements significatifs dans des biens d'équipement. En cas de rupture d'approvisionnement, ceux-ci sont temporairement inutilisés, et les frais de fonctionnement ne sont plus couverts. La détention d'un stock de réserve permet de couvrir au moins les coûts variables. Plus le risque de rupture d'approvisionnement est important, plus le rendement de réserve augmente : celui-ci est une fonction décroissante du niveau des stocks.

transport, de transformation proprement dite, ou de commercialisation de la commodité). Plusieurs éléments contribuent à la rigidité du processus de transformation : celui-ci n'est pas nécessairement réversible, les opérations de transport, de transformation et de commercialisation sont caractérisées par la présence de coûts fixes élevés, les stocks sont éloignés des lieux de transformation ou de commercialisation, et sont de qualité variable. L'association de l'incertitude de l'offre et de la demande à la rigidité du processus de transformation permet d'expliquer la détention de stocks en situation de déport.

Les principales conclusions de ces travaux peuvent être synthétisées de la façon suivante : la détention de stocks en situation de déport est expliquée par deux éléments, l'incertitude affectant l'offre et la demande de commodités, et la rigidité des activités industrielles et commerciales dans lesquelles les commodités sont impliquées. Cette rigidité se manifeste par une incapacité, pour les opérateurs, à adapter rapidement l'offre à une variation de la demande. Elle peut être liée à la présence de coûts fixes élevés dans les activités de transport, de stockage, de production et de transformation de la commodité, à la distance séparant les lieux de production et de consommation de la commodité, ou à l'existence d'un différentiel de qualité entre différents stocks. Incertitude et rigidité agissent le plus souvent de façon conjointe. A ces deux éléments s'ajoute enfin, en situation de déport comme en situation de report, la possibilité pour certains producteurs de restreindre leur offre.

### **2.2.2. La relation entre prix au comptant et prix à terme**

La relation entre prix au comptant et prix à terme dans un marché de commodité stockable peut être formulée de la façon suivante :

$$F(t,T) = S(t) + C_S(t,T) - [A_I(t) + C_R(t)]$$

- $F(t,T)$  : prix à terme en  $t$  du contrat parvenant à échéance en  $T$ ,
- $S(t)$  : prix au comptant en  $t$  de la commodité livrable sous contrat,
- $C_S(t,T)$  : coût de stockage entre  $t$  et  $T$ ,
- $A_I(t)$  : avantage que présente la détention de stocks en situation d'incertitude,
- $C_R(t)$  : coûts de la rigidité.



L'analyse des situations de report et de déport issue de cette relation est la suivante : le coût de stockage  $C_S(t,T)$  est une fonction croissante du niveau des stocks. En revanche, l'avantage  $A_I(t)$  que présente la détention de stocks compte tenu de l'incertitude affectant l'offre et la demande de commodité, et les coûts  $C_R(t)$  de la rigidité sont une fonction décroissante du niveau des stocks. De plus, pour des commodités non saisonnières,  $A_I(t)$  et  $C_R(t)$  agissent toujours conjointement.

Lorsque le niveau des stocks est faible, une modification marginale de l'offre ou de la demande de commodité a un impact significatif sur les prix. Le fait de détenir des stocks permet de profiter d'une hausse imprévue de la demande et de supporter un retard imprévu dans l'approvisionnement. La variable  $A_I(t)$  est positive. De même, la rigidité des activités de transport, de transformation et de commercialisation des marchandises se manifeste d'autant plus fortement que le volume de stocks est faible : la variable  $C_R(t)$  est positive. A l'inverse, lorsque le niveau des stocks augmente,  $A_I(t)$  et  $C_R(t)$  tendent vers une valeur nulle.  $C_R(t)$  peut cependant redevenir positif si les capacités de stockage, de transformation ou de transport de la marchandise parviennent à saturation.

Parce qu'elles recensent les différentes explications de la détention de stocks en situation de déport proposées dans la littérature, les variables  $A_I(t)$  et  $C_R(t)$  peuvent être regroupées en une seule,  $[A_I(t) + C_R(t)]$ , appelée *convenience yield*. Cette définition servira de référence lors de l'élaboration du troisième modèle de structure par terme des prix présenté dans cet article.

### 2.3. Conclusion

L'analyse de la relation entre prix au comptant et prix à terme dans un marché de commodités permet d'aboutir à un certain nombre de conclusions utiles à l'élaboration d'un modèle de structure par terme des prix des commodités. En premier lieu, la relation entre prix au comptant et prix à terme présentée ci-dessus permet d'identifier au moins deux variables explicatives du prix à terme : le prix au comptant, et *le convenience yield* net des coûts de stockage. Ces deux variables doivent être positivement corrélées : en effet, elles sont toutes deux une fonction inverse du niveau des stocks.

L'étude des relations d'arbitrage permet également de mettre en évidence le comportement asymétrique de la base : en premier lieu, son niveau est limité, en situation de report, aux coûts de stockage, ce qui n'est pas le cas en situation de déport. Ensuite, la base est stable en situation de report, et volatile en situation de déport, les stocks n'étant pas suffisamment abondants pour absorber les fluctuations de prix.

### SECTION 3: TROIS MODELES DE STRUCTURE PAR TERME DES PRIX

La troisième section de cet article est consacrée à la présentation de trois modèles de structure par terme des prix des commodités. Parmi eux, deux constituent, en 1999, une référence : le modèle monofactoriel développé par Brennan et Schwartz en 1985 représente la version la plus simple de modèle stochastique appliqué aux marchés de commodités ; le modèle à deux facteurs proposé par Schwartz en 1997, très proche de celui développé en 1990 par Gibson et Schwartz, a suscité de nombreux travaux<sup>11</sup>. Le troisième modèle, inspiré de celui de Schwartz, introduit une asymétrie dans le comportement du *convenience yield*.

Ces modèles ont en commun quatre hypothèses : en premier lieu, les actifs sont traités sur des marchés sans frictions, sans taxes, ni coûts de transaction ; de plus, les échanges sont continus, de telle sorte que les opérateurs peuvent en permanence rééquilibrer leur portefeuille ; il n'y a pas de restriction à la vente à découvert, les taux de prêt et d'emprunt sont égaux ; enfin, les taux d'intérêt sont constants<sup>12</sup>. A ces hypothèses s'ajoute celle relative à la dynamique des états, spécifique à chaque modèle.

Une démarche identique préside à l'élaboration de ces modèles : la première étape consiste à définir les variables d'état et la dynamique qui leur est associée. Ensuite, sachant que le prix d'un contrat à terme est une fonction de ces variables d'état, du temps, et de l'échéance du contrat considéré, l'application du lemme d'Itô permet d'obtenir le comportement dynamique du prix à terme. A ce stade, un raisonnement d'arbitrage et la construction d'un portefeuille de couverture permettent d'obtenir la prime de terme associée à chaque modèle, pour aboutir à l'équation fondamentale de valorisation caractérisant chacun des modèles et, lorsque, c'est possible, à la solution de cette équation.

---

<sup>11</sup> Brennan et Crew 1995 ; Hilliard et Reis 1998 ; Schwartz 1997 (b) ; Cortazar et Schwartz 1998...

Pour chacun des trois modèles étudiés, seules les deux « extrémités » de ce processus de construction sont présentées. L'analyse du raisonnement d'arbitrage sur lequel il se fonde est reportée en conclusion de cette section.

### 3.1. *Modèle avec mouvement brownien géométrique*

Le modèle monofactoriel développé par Brennan et Schwartz en 1985 retient le prix au comptant comme seule variable explicative du prix à terme. Il prend de plus en considération l'existence du *convenience yield*, et suppose que celui-ci est constant.

La définition du *convenience yield* proposée les deux auteurs à l'occasion de la publication de ce modèle a été unanimement retenue dans tous les travaux ultérieurs portant sur la structure par terme des prix des commodités. Cette définition est la suivante<sup>13</sup> : « *The convenience yield is the flow of services that accrues to an owner of the physical commodity but not to the owner of a contract for future delivery of the commodity. [...] Recognizing the time lost and the costs incurred in transporting a commodity from one location to another, the convenience yield may be thought of as the value of being able to profit from temporary local shortages of the commodity through ownership of the physical commodity. The profit may arise either from local price variations or from the ability to maintain a production process as a result of ownership of an inventory of raw material.*

*[...] competition among potential storers will ensure that the net convenience yield of the marginal unit of inventory will be the same across all individuals who hold positive inventories. This marginal (net) convenience yield can be expected to be inversely proportional to the amount of the commodity held in inventory. »*

Par rapport à la synthèse proposée à la fin de la section précédente, cette définition n'intègre pas explicitement le fait que la détention de stocks en situation de déport puisse être due, outre l'incertitude associée à l'offre et à la demande de commodité, aux coûts liés à la rigidité des activités de stockage, de transformation et de commercialisation des commodités.

---

<sup>12</sup> Supposer que les taux d'intérêt sont constants revient à identifier les prix à terme aux prix forward.

<sup>13</sup> Brennan M.J., Schwartz E.S., 1985 : « Evaluating Natural Resource Investments », *Journal of Business*, Vol 58, n°2, p 135-157.

### 3.1.1. Dynamique des états

La dynamique du prix au comptant est exprimée de la façon suivante :

$$dS = \mu S dt + \sigma_S S dz$$

- où
- S est le prix au comptant de la commodité,
  - $\mu$  est le rendement instantané anticipé pour la variable S,
  - dz est l'incrément du mouvement brownien associé à S,
  - $\sigma_S$  est la volatilité du prix au comptant.

Dans ce modèle, le prix au comptant suit un mouvement brownien géométrique (BG). Ce type de dynamique est très fréquemment utilisé pour représenter le comportement des prix des actions. Elle implique que la variation du prix au comptant à un instant t est indépendante des variations passées, et que le prix évolue selon la tendance  $\mu$ .

La volatilité du prix au comptant est proportionnelle à son niveau, ce qui peut être expliqué de la façon suivante : lorsque les stocks sont rares, les prix au comptant sont élevés. Dans cette situation, toute modification de la demande de commodité a un impact plus important sur les prix au comptant, les stocks n'étant pas suffisamment abondants pour amortir les fluctuations de prix. Enfin, la dynamique du prix au comptant, telle qu'elle est exprimée, ignore les comportements d'ajustement des acteurs aux évolutions du prix au comptant et les modifications de l'offre et de la demande qui en résultent.

### 3.1.2. Equation fondamentale de valorisation et solution associée

L'équation fondamentale de valorisation des prix à terme est la suivante :

$$\frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 F_{SS} + (r - c) S F_S - F_t = 0$$

Le paramètre c représente le *convenience yield* net des coûts de stockage, r est le taux d'intérêt sans risque. Tous deux sont considérés comme constants. Le *convenience yield* intervient ici comme un dividende affectant le prix de la commodité. Il capte tous les facteurs conduisant la tendance du prix au comptant à un niveau inférieur à celui du taux d'intérêt sans risque.

La condition frontière associée à cette équation est :  $F(S,T,T) = S(T)$ . Cette condition, identique pour les trois modèles étudiés, représente le processus de convergence du prix à terme vers le prix au comptant à l'échéance du contrat à terme. Ce processus est lié à l'existence d'une procédure de livraison à l'échéance du contrat à terme. Si, à l'échéance du contrat, le prix à terme est différent du prix au comptant, des opérations d'arbitrage rétablissent immédiatement la convergence. La solution de cette équation aux dérivées partielles est enfin :

$$F(S,t,T) = S e^{(r-c)\tau}$$

Où  $\tau = T - t$  représente la maturité du contrat.

### 3.2. *Modèle avec comportement de retour vers une valeur moyenne*

Le second modèle correspond à celui développé par Gibson et Schwartz en 1990, incluant les modifications apportées par Schwartz en 1997. L'hypothèse centrale sur laquelle il repose est que le prix à terme d'une commodité à un instant  $t$  et pour une échéance  $T$  dépend principalement de deux variables d'état : le prix au comptant  $S$  et le *convenience yield*  $C$ .

#### 3.2.1 Dynamique des états

Dans ce modèle, la dynamique des états est exprimée de la façon suivante :

$$\begin{cases} dS = (\mu - C)Sdt + \sigma_S S dz_S \\ dC = \kappa(\alpha - C)dt + \sigma_C dz_C \end{cases}$$

Avec  $\kappa, \sigma_S, \sigma_C > 0$

- Où :
- $S$  est le prix au comptant,
  - $C$  est le *convenience yield*,
  - $\mu$  est le rendement instantané anticipé pour la variable  $S$ ,
  - $\alpha$  est la moyenne à long terme du *convenience yield*,
  - $\kappa$  est la vitesse de convergence du *convenience yield* vers  $\alpha$ ,

- $dz_S$  est l'incrément du mouvement brownien associé au prix au comptant,
- $dz_C$  est l'incrément du mouvement brownien associé au *convenience yield*,
- $\sigma_S$  est la volatilité du prix au comptant,
- $\sigma_C$  est la volatilité du *convenience yield*.

Les deux variables d'état suivent un processus de diffusion joint :  $\rho dt = dz_S dz_C$ , où  $\rho$  est le coefficient de corrélation liant les deux browniens.

Dans ce modèle, la dynamique du prix au comptant intègre explicitement le *convenience yield* net des coûts de stockage, qui modifie la tendance du prix au comptant et intervient comme un dividende stochastique. Cette représentation correspond à celle proposée par Schwartz en 1997. Dans le modèle présenté par Gibson et Schwartz en 1990, la dynamique du prix au comptant était identique à celle du modèle BG. Le fait d'intégrer le *convenience yield* dans la dynamique du prix au comptant modifie cette dynamique en donnant au prix au comptant une tendance à revenir vers une valeur moyenne. Il permet donc, à l'inverse du modèle BG et du modèle de 1990, de prendre en considération les comportements des acteurs face aux variations du prix au comptant et les modifications de l'offre et de la demande qui en résultent.

Contrairement au modèle BG, et conformément aux travaux de Gibson et Schwartz (1989) le *convenience yield* est ici la seconde variable d'état du modèle. Pour représenter sa dynamique, un processus de retour vers une valeur moyenne à long terme est utilisé. Cette formulation repose sur l'hypothèse selon laquelle il existe un niveau moyen de stocks permettant de satisfaire les besoins de l'industrie vers lequel, à travers le comportement des opérateurs, le volume des stocks et donc le *convenience yield* ont tendance à converger. Lorsque le *convenience yield* est faible, les stocks sont importants, et les opérateurs supportent un coût de stockage élevé au regard des services apportés par la détention de marchandise. S'ils sont rationnels, ils auront tendance à se défaire des marchandises excédentaires qu'ils détiennent. Inversement, si le *convenience yield* est élevé, ils chercheront à reconstituer leurs stocks. Ce modèle sera qualifié, dans la suite de ces travaux, de modèle MR (*Mean Reverting*).

### 3.2.2. Equation fondamentale de valorisation et solution associée

L'équation fondamentale de valorisation des prix à terme est la suivante :

$$\frac{1}{2} \mathbf{s}_s^2 S^2 F_{ss} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_c^2 F_{cc} + \mathbf{r} \mathbf{s}_s \mathbf{s}_c S F_{sc} + (r - C) S F_s + [\mathbf{k}(\mathbf{a} - C) - \mathbf{I}] F_c - F_t = 0$$

où  $\lambda = \lambda_C \sigma_C$  est la prime de risque associée au *convenience yield*.

La condition frontière associée à cette équation aux dérivées partielle est identique à celle définie pour le modèle BG :  $F(S, C, T, T) = S(T)$ . Enfin, la solution de cette équation est la suivante :

$$F(S, C, t, T) = S(t) \times A[\mathbf{t}] \times \exp(-HC(t))$$

Avec :

$$H = \frac{1 - e^{-kt}}{\mathbf{k}}, \quad \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{k}},$$

$$A[\mathbf{t}] = \exp\left(\left[\left(r - \hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} \times \frac{\mathbf{s}_c^2}{\mathbf{k}^2} - \frac{\mathbf{s}_s \mathbf{s}_c \mathbf{r}}{\mathbf{k}}\right) \times \mathbf{t}\right] + \left[\frac{1}{4} \mathbf{s}_c^2 \times \frac{1 - e^{-2kt}}{\mathbf{k}^3}\right] + \left[\left(\hat{\mathbf{a}} \mathbf{k} + \mathbf{s}_s \mathbf{s}_c \mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}_c^2}{\mathbf{k}}\right) \times \left(\frac{1 - e^{-kt}}{\mathbf{k}^2}\right)\right]\right)$$

### 3.3. Modèle asymétrique

Ce dernier modèle (AS) est une extension du précédent. Il comporte les mêmes variables d'état, et la dynamique du prix au comptant est identique. En revanche, une asymétrie est introduite dans la dynamique du *convenience yield*, de telle sorte que la relation suivante associe le *convenience yield* du modèle MR à celui du modèle AS :

$$\tilde{C}(t) = (1 - \mathbf{b})C(t) + \mathbf{b} \exp(C(t))$$

Avec :  $-\tilde{C}$  : *convenience yield* dans le modèle AS

$-C$  : *convenience yield* dans le modèle MR

L'asymétrie est mesurée par le paramètre  $\beta$ . Lorsque ce dernier est nul, le modèle AS s'identifie au modèle MR. La définition retenue pour le *convenience yield* est celle présentée à la fin de la section 2.

#### 3.3.1. Dynamique des états

Compte tenu de la relation exposée ci-dessus, la dynamique des états est exprimée, dans le modèle AS, de la façon suivante<sup>14</sup> :

$$\begin{cases} dS = (\mu - \tilde{C})Sdt + \mathbf{s}_s S dz_s \\ d\tilde{C} = \left( \mathbf{k}(\mathbf{a} - C)(1 - \mathbf{b} + \mathbf{b}e^C) + \frac{1}{2} \mathbf{b}e^C \mathbf{s}_C^2 \right) dt + (1 - \mathbf{b} + \mathbf{b}e^C) \mathbf{s}_C dz_C \end{cases}$$

Avec :  $dz_s \cdot dz_C = \rho dt$   
 $\kappa, \sigma_s, \sigma_C > 0$

Dans ce modèle comme dans le précédent, le *convenience yield* n'est plus une fonction déterministe du prix au comptant. De même, la représentation de la dynamique du *convenience yield* par un processus de retour vers une valeur moyenne est expliquée, comme dans le cadre du modèle MR, par le comportement des opérateurs du marché physique.

En revanche, dans le modèle AS, la dynamique du *convenience yield* est asymétrique : lorsque cette variable d'état atteint un niveau élevé, sa volatilité est plus importante. Ce choix peut être expliqué de la façon suivante. En premier lieu, dans ce modèle comme dans les précédents, les raisons expliquant l'introduction d'une volatilité du prix au comptant proportionnelle au niveau de prix au comptant sont également valables pour justifier l'introduction d'une volatilité du *convenience yield* proportionnelle à son niveau. Lorsque les stocks sont rares, toute modification de la demande de commodité a un impact plus important sur les prix au comptant. Ces derniers fluctuant plus fortement, le bénéfice retiré de la vente ou de la transformation de stocks suit la même évolution. La volatilité du *convenience yield* augmente de ce fait.

En second lieu, lorsque les stocks sont rares, c'est-à-dire lorsque l'ajustement entre les opérations de production, de transport et de transformation de la commodité n'est plus aussi bien assuré que dans les conditions de fonctionnement « normales » du marché, le rendement de réserve associé aux stocks (en retenant la terminologie de Weymar<sup>15</sup>) inexistant en d'autres circonstances, peut prendre des valeurs très élevées dès qu'un incident vient menacer la continuité des opérations de production, de

---

<sup>14</sup> Pour des raisons de simplicité, et parce que cela nuisait pas à la portée de ces travaux, un mouvement brownien standard unique a été utilisé pour représenter la dynamique de  $\tilde{C}$ .

<sup>15</sup> Weymar, 1968.



transport, et de transformation. Une fois résolues les difficultés nées de cet incident, le rendement de réserve redevient nul. Cette composante du *convenience yield* varie donc en fonction de la capacité des opérateurs à faire face, à chaque instant, à l'imprévu. Pour cette seconde raison, dans ces circonstances, le *convenience yield* est plus volatile.

### 3.3.2. Equation fondamentale de valorisation et solution associée

L'équation fondamentale de valorisation du modèle asymétrique est la suivante :

$$\boxed{\frac{1}{2}\mathbf{s}_s^2 S^2 F_{SS} + \frac{1}{2}\mathbf{s}_c^2 (1 - \mathbf{b} + \mathbf{b}e^c)^2 F_{\tilde{c}\tilde{c}} + r\mathbf{s}_s \mathbf{s}_c S (1 - \mathbf{b} + \mathbf{b}e^c) F_{S\tilde{c}} + (r - \tilde{C}) S F_S + \left[ \mathbf{k}(1 - \mathbf{b} + \mathbf{b}e^c)(\hat{\mathbf{a}} - C) + \frac{1}{2}\mathbf{s}_c^2 \mathbf{b}e^c \right] F_{\tilde{c}} - F_t = 0}$$

Avec, comme précédemment,  $\lambda = \lambda_C \sigma_C$  et  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}$ . Là encore, la condition frontière associée à cette équation est :  $F(S, C, T, T) = S(T)$ . L'expression semi-analytique de F est la suivante :

$$F(S, \tilde{C}, t, T) = S(t) \times A(\mathbf{t}) \times \exp(H(\mathbf{b} - 1)C(t)) \times E_t^Q \left[ \exp \left( \mathbf{s}_s \int_t^T dz_s(v) - (1 - \mathbf{b}) \int_t^T B(v) dv - \mathbf{b} \int_t^T (\exp(D(v) + B(v))) dv \right) \right]$$

Avec :

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}, \quad H = \frac{1 - e^{-\mathbf{k}t}}{\mathbf{k}}, \quad A(\mathbf{t}) = \exp \left( \left( r - \frac{1}{2} \mathbf{s}_s^2 \right) \mathbf{t} + \hat{\mathbf{a}}(1 - \mathbf{b})(H - \mathbf{t}) \right),$$

$$B(v) = \mathbf{s}_c e^{-\mathbf{k}v} \int_t^v e^{\mathbf{k}y} dz_c(y), \quad D(v) = \hat{\mathbf{a}} + (C(t) - \hat{\mathbf{a}}) e^{-\mathbf{k}(v-t)}$$

### 3.4. Conclusion: modèles de structure par terme des prix commodités et hypothèse de marchés complets

Avant d'aborder la comparaison des trois modèles de structure par terme des prix des commodités présentés ci-dessus, il est nécessaire de souligner que l'obtention de l'équation fondamentale de valorisation des prix à terme propre à chacun de ces modèles, ainsi que sa résolution, reposent sur des hypothèses fortes. En particulier, le

raisonnement d'arbitrage permettant de déterminer l'équation fondamentale de valorisation suppose que l'on se trouve en situation de marchés complets, ce qui n'est pourtant pas le cas.

Ce raisonnement d'arbitrage est le suivant : dans un univers où les transactions sont réalisées en continu, et dans un marché complet, un actif contingent peut être répliqué par une combinaison d'actifs existants. Ces actifs doivent réunir certaines conditions. En premier lieu, ils doivent être non redondants : chacun doit représenter une source de risque distincte affectant l'évolution du prix de l'actif contingent. De plus, ils doivent être suffisamment échangés pour que l'on puisse les considérer comme évalués en l'absence de toute opportunité d'arbitrage<sup>16</sup>. Sous ces conditions, ces actifs peuvent alors constituer un portefeuille de couverture répliquant l'actif contingent, leurs proportions respectives étant déterminées de telle sorte que la stratégie soit non risquée, et que la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage soit respectée.

En adoptant une méthode similaire à celle utilisée par Black et Scholes (1973) pour valoriser le prix d'une option d'achat sur action, le portefeuille de couverture utilisé pour répliquer le prix d'un contrat à terme de commodité devrait être composé, dans le cas d'un modèle monofactoriel, d'une position sur l'actif sous-jacent (la commodité), d'une position sur l'actif contingent (le contrat à terme), et d'une position sur l'actif sans risque. Cependant, les marchés physiques de commodités peuvent difficilement être considérés comme des marchés sur lesquels il n'existe aucune opportunité d'arbitrage, de telle sorte que l'actif sous-jacent dans ce cas, ne peut pas réellement être qualifié de « *basic security* ».

Pour contourner cette difficulté, la position sur le marché physique est remplacée par une position sur un contrat à terme. Cette solution n'est acceptable que si le contrat est suffisamment échangé, et son prix fortement corrélé au prix au comptant de la commodité. Dès lors, le portefeuille de couverture est composé de deux positions sur le marché à terme ; la position sur l'actif sans risque disparaît, car l'investissement dans un contrat à terme peut être considéré comme nul, exception faite du dépôt.

---

<sup>16</sup> Les remarques concernant les conditions requises pour que les actifs composant le portefeuille de couverture permettent effectivement de répliquer l'actif contingent, et pour que les équations fondamentales de valorisation des modèles présentée puissent être résolues à l'aide d'une solution de type Feynman-Kac, en considérant que la probabilité risque-neutre est unique, sont dues au Professeur Hélyette Geman.

Lorsque le modèle de structure par terme est établi en supposant que les deux variables explicatives du prix à terme sont le prix au comptant et le *convenience yield*, une seconde difficulté surgit : le *convenience yield* ne correspondant à aucun actif réellement échangé, pour représenter l'incertitude qui lui est associée, la seule solution envisageable est de prendre, là encore, une position sur le marché à terme. Un actif de même nature (un contrat à terme) est donc utilisé pour assurer une protection contre deux sources de risque distinctes, ce qui semble contraire à la condition de non-redondance exposée ci-dessus. Pour pouvoir être considérés comme non redondants, ces deux contrats à terme doivent avoir des échéances suffisamment éloignées l'une de l'autre. Ils doivent de plus être suffisamment échangés pour être considérés comme des « *basic securities* ».

## SECTION 4 : SIMULATIONS

Cette section a pour objectif de montrer comment les prix à terme théoriques obtenus à partir d'un modèle varient lorsque les valeurs des paramètres ou le niveau des variables d'état de ce modèle sont modifiées et de comparer les résultats obtenus pour chaque modèle.

Le modèle BG est construit à partir d'une variable d'état, le prix au comptant  $S$ , et de deux paramètres : le taux d'intérêt  $r$  et le *convenience yield*  $c$ . Le modèle MR comprend une variable d'état supplémentaire, le *convenience yield*  $C$ , et sept paramètres : le taux d'intérêt, la moyenne à long terme du *convenience yield*,  $\alpha$ , la vitesse de convergence du *convenience yield*,  $\kappa$ , la volatilité du prix au comptant,  $\sigma_S$ , la volatilité du *convenience yield*,  $\sigma_C$ , la corrélation entre les browniens  $\rho$ , et le prix de marché du risque associé au *convenience yield*,  $\lambda$ . Enfin, le modèle AS comporte un paramètre supplémentaire : le degré d'asymétrie introduit dans la dynamique du *convenience yield*,  $\beta$ . Les valeurs des paramètres utilisées pour les simulations varient entre deux extrêmes :

	S	C	r	$\alpha$	$\kappa$	$\sigma_S$	$\sigma_C$	$\rho$	$\lambda$	$\beta$
Min	12	-0,3	0,02	-0,1	0,5	0,1	0,3	0	-1	0
Max	20	0,2	0,06	0,1	2	0,5	0,7	1	1	1

Les simulations sont réalisées en supposant que toutes les combinaisons de valeurs pour ces variables et ces paramètres peuvent être envisagées.

#### 4.1. *Modèle BG*

Dans le modèle BG, le niveau relatif des deux paramètres a une influence directe sur l'ensemble de la structure par terme des prix : lorsque le taux d'intérêt est supérieur au *convenience yield*, toute la structure par terme des prix est en report. Dans le cas inverse, elle est en déport.

##### 4.1.1. **Impact d'une variation du taux d'intérêt**

Pour une structure par terme initialement en report (Figure 1), une augmentation du taux d'intérêt accentue, toutes choses égales par ailleurs, cette situation de report. L'impact de la variation du taux d'intérêt est d'autant plus prononcé que la maturité considérée est éloignée. Lorsque la structure par terme des prix est initialement en situation de déport, et que le taux d'intérêt augmente, ce déport se maintient tant que  $r$  reste inférieur à  $c$ , mais il est d'autant moins prononcé que le taux d'intérêt est élevé.

##### 4.1.2. **Impact d'une variation du *convenience yield***

Lorsque le taux d'intérêt est supérieur au *convenience yield*, (cas où  $c = -0.2$  dans la figure 2), la structure par terme des prix est en report. Ce report est d'autant plus prononcé que la maturité est éloignée et que, toutes choses égales par ailleurs, la valeur du *convenience yield* diminue. En revanche, lorsque le taux d'intérêt devient inférieur au *convenience yield*, une augmentation de  $c$  a pour effet d'accroître la situation de déport sur l'ensemble de la structure par terme des prix. Ces derniers tendent plus rapidement vers zéro.

### 4.1.3. Conclusion

Ces simulations illustrent l'un des inconvénients majeurs d'un modèle monofactoriel : le niveau relatif du taux d'intérêt et du *convenience yield* déterminant la forme de l'ensemble de la structure par terme des prix, ce modèle ne peut représenter que des courbes de prix monotones croissantes, monotones décroissantes, ou stables. Le taux de variation du prix à terme, dans ce modèle, est en effet une constante :

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dt} = r - c,$$

Si  $(r - c)$  est positif, la structure par terme est en report, et le prix à terme tend vers l'infini avec l'échéance. Dans le cas inverse, la structure par terme est en déport, et la limite vers laquelle tend le prix à terme lorsque la maturité augmente est nulle. Enfin, lorsque  $r = c$ , le prix à terme tend vers le prix au comptant.

Le modèle développé par Brennan et Schwartz en 1985 ne permet donc pas de représenter de façon satisfaisante la structure par terme des prix dans un marché de commodités tel que celui du pétrole brut : en premier lieu, comme l'illustrent les figures 1 et 2, les valeurs atteintes par le prix à terme lorsque l'échéance s'éloigne n'ont pas de signification sur le plan économique. Ensuite, ce modèle considère le *convenience yield* net des coûts de stockage comme une constante, ce que contredisent les travaux empiriques et théoriques réalisés dans ce domaine. Le modèle BG n'est donc adapté qu'à des catégories bien spécifiées de commodités, pour lesquelles le *convenience yield* joue un rôle marginal : c'est le cas par exemple des métaux précieux, pour lesquels le volume des stocks est considérable, ces derniers constituant des réserves de valeur plutôt que les intrants d'un processus de production.

Dernier inconvénient présenté par ce modèle : il suppose que la volatilité des rendements des prix à terme est identique quelle que soit la maturité considérée :

$$\frac{dF}{F} = \mathbf{s}_s dz$$

Or, les observations empiriques contredisent nettement cette proposition : les rendements des prix à terme observés sur le marché du pétrole brut sont d'autant moins volatiles que l'échéance est éloignée.

## 4.2. Modèle MR

Compte tenu du nombre important de paramètres et de l'expression relativement complexe du prix à terme dans le modèle MR, seuls les cas pour lesquels une interprétation simple peut être avancée sont étudiés.

### 4.2.1. Structure par terme pour différents niveaux de *convenience yield*

La simulation des structures par terme des prix pour différents niveaux de *convenience yield* initial permet en premier lieu de remarquer la variété des courbes obtenues à partir du modèle MR (figure 3) : celles-ci peuvent avoir une forme de cuvette ( $C = 0.2$ ), de bosse ( $C = -0.3$ ), ou encore être stables ( $C = 0$ ).

La simulation permet également de montrer que dans le modèle MR, l'impact d'une variation de  $C$  sur la forme de la structure par terme des prix est une fonction de l'écart entre le niveau du *convenience yield* et sa valeur moyenne à long terme  $\alpha$  : plus  $C$  est éloigné de  $\alpha$  ( $C = -0.3$ ) plus il tarde à revenir vers cette valeur, et plus la maturité pour laquelle l'ensemble de la courbe se stabilise s'éloigne. Si ce phénomène n'apparaît pas de façon très marquée graphiquement, l'étude des prix à terme théoriques obtenus à partir du modèle MR (tableau 1) montre en revanche que le taux de variation du prix à terme se stabilise dès la maturité de 1,8 ans lorsque  $C = \alpha = 0$ , et que cette stabilisation n'apparaît qu'à partir de 3,4 ans lorsque  $C = -0.3$ .

Enfin, dans le modèle MR, le niveau des prix à terme est une fonction décroissante du niveau du *convenience yield* : la dérivée de  $F$  par rapport à  $C$  est en effet négative : plus le niveau de  $C$  est élevé, et plus le niveau des prix à terme diminue.

### 4.2.3. Impact d'une variation du taux d'intérêt

Dans le modèle MR, l'impact d'une augmentation du taux d'intérêt ne se limite pas, comme dans le modèle BG, à une accentuation de la situation de report : lorsque le taux d'intérêt est élevé, les prix à terme pour une échéance éloignée, en déport dans la figure 4, passent en report, et ce d'autant plus rapidement et fortement que le taux d'intérêt est élevé.

Pour une situation de déport sur les échéances rapprochées, les résultats obtenus à partir de la simulation du modèle MR sont proches de ceux présentés ci-dessus. Lorsque le taux d'intérêt est faible ( $r = 0,02$ ), la structure par terme est en déport sur toutes les échéances. Le déport sur les échéances éloignées se transforme en un report lorsque le taux d'intérêt augmente, ce report étant d'autant plus prononcé que le taux d'intérêt est élevé.

#### 4.2.4. Impact d'une variation de la vitesse de convergence $k$

L'exemple présenté en figure 5 montre que plus la vitesse de convergence est faible, plus le taux de variation du prix à terme augmente : le report est particulièrement prononcé pour les échéances éloignées lorsque  $\kappa$  tend vers 0. Inversement, plus ce paramètre est élevé et plus le taux de variation du prix à terme diminue lorsque l'échéance considérée s'éloigne : le report sur les échéances rapprochées représentées en figure 5 se transforme en un déport.

Enfin, pour les échéances rapprochées, la forme de la structure par terme des prix est particulièrement sensible aux niveaux du *convenience yield* et de  $\kappa$ . Le taux de variation du prix à terme, dans le modèle MR, est en effet le suivant :

$$\boxed{\frac{1}{F} \frac{dF}{dt} = -C e^{-kt} + B_t}$$

$$\text{Avec : } B_t = \left( r - \hat{a} + \frac{s_2^2}{2k^2} - \frac{s_s s_c r}{k} \right) + \frac{s_c^2 e^{-2kt}}{2k^2} + \left( \hat{a}k + s_s s_c r - \frac{s_c^2}{k} \right) \times \frac{e^{-kt}}{k}$$

Lorsque la maturité augmente et tend vers l'infini, le taux de variation du prix à terme tend vers une constante indépendante du niveau de C :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} \right) = r - \hat{a} + \frac{1}{k} + \frac{s_c^2}{2k^2} - \frac{s_s s_c r}{k}$$

#### 4.2.5. Conclusion

Un modèle à deux facteurs permet de représenter des structures par terme beaucoup plus variées que ne l'autorise un modèle monofactoriel. De plus, à la différence du modèle BG, la volatilité du prix à terme décroît avec la maturité  $\tau$ :

$$s_F^2(t) = s_S^2 + s_C^2 \left( \frac{1 - e^{-kt}}{k} \right)^2 - \left[ 2 \times \frac{1 - e^{-kt}}{k} \times r s_S s_C \right]$$

Lorsque le contrat s'approche de sa date de maturité ( $\tau \rightarrow 0$ ), la volatilité du prix à terme converge vers celle du prix au comptant, le prix à terme tendant lui-même vers le prix au comptant. Enfin, lorsque l'échéance approche de l'infini, la volatilité des rendements

converge vers une valeur fixe :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_F^2 = s_S^2 + \frac{s_C^2}{k^2} - \frac{2r s_S s_C}{k}.$$

### 4.3. Modèle AS

Les simulations réalisées à partir du modèle AS sont centrées sur l'étude de l'asymétrie introduite dans la dynamique du *convenience yield*. En l'absence de solution analytique pour ce modèle, les simulations sont réalisées à l'aide d'une méthode Monte Carlo<sup>17</sup>.

#### 4.3.1. Dynamique du *convenience yield*

La dynamique du *convenience yield*, dans le modèle AS, présente deux caractéristiques : en premier lieu, comme dans le modèle MR, *le convenience yield* a tendance à revenir vers sa moyenne à long terme ; ensuite, comme les figures 6 et surtout 7 l'illustrent, la volatilité du *convenience yield* est proportionnelle à son niveau, cette asymétrie étant d'autant plus prononcée que le degré d'asymétrie  $\beta$  est élevé.

L'étude de l'évolution de la fréquence de distribution du *convenience yield* permet par ailleurs de montrer que cette dernière devient assez rapidement asymétrique lorsque  $\beta$  augmente, ce qui permet de supposer que la valeur estimée de  $\beta$  sera relativement faible, de l'ordre de 0,1 à 0,2.

Enfin, comme la figure 7 permet de le mettre en évidence, *le convenience yield* du modèle AS est supérieur à celui du modèle MR, l'écart entre ces deux variables étant proportionnel à la valeur de  $\beta$ .

---

<sup>17</sup> Le schéma de discrétisation utilisé est un schéma d'Euler.



### 4.3.2. Impact d'une variation du niveau d'asymétrie

Dans le modèle AS et dans le modèle MR, la *convenience yield* intervient dans la dynamique du prix au comptant comme un dividende stochastique. Par conséquent,  $\tilde{C}$  étant supérieur à  $C$ , pour obtenir deux prix à terme d'échéance  $\tau$  identiques à partir des modèles AS et MR, il faut introduire, dans le modèle AS, un prix au comptant supérieur à celui du modèle MR.

### 4.3.3. Conclusion

L'une des particularités des modèles de structure par terme des prix des commodités présentés dans ce texte provient du caractère non observable des variables d'état utilisées. Dans la plupart des marchés de commodités, il n'existe en effet pas de séries statistiques de prix au comptant : les marchés physiques sont la plupart du temps géographiquement dispersés, les échanges ne sont pas nécessairement très fréquents en un lieu donné, les termes de la transaction sont variables. Par conséquent, il est souvent impossible de constituer, à partir des informations disponibles, des séries de prix homogènes. Par ailleurs, la *convenience yield* ne correspond à aucun actif réellement échangé.

L'introduction de ces deux variables dans un modèle de structure par terme nécessite donc le choix d'une méthode de reconstitution de séries de données temporelles. Fréquemment, le prix au comptant est identifié au prix à terme rapproché, tandis que la *convenience yield* net des coûts de stockage est estimé, à une date  $t$ , à partir de la relation entre prix au comptant et prix à terme issue du modèle BG, en utilisant deux prix à terme de maturité proche<sup>18</sup>. Ce sont cependant des approximations, et des méthodes plus précises peuvent être requises pour améliorer les performances du modèle. Schwartz (1997), utilise par exemple un filtre de Kalman pour reconstituer les séries de prix au comptant et de *convenience yield*.

---

<sup>18</sup> En utilisant deux prix à terme d'échéances rapprochées  $T_1$  et  $T_2$ , il est en effet possible d'écrire :

$$c = r - \frac{\ln(F(S, t, T_1)) - \ln(F(S, t, T_2))}{T_1 - T_2}$$

#### 4.4. Performances des modèles de structure par terme des prix des commodités.

L'introduction du *convenience yield* comme seconde variable d'état permet d'accroître le réalisme des modèles de structure par terme des prix des commodités : les structures par terme obtenues sont en effet plus proches de celles observées dans la réalité (Figure 9). Cette amélioration est cependant obtenue aux prix d'une augmentation de la complexité de l'analyse : pour obtenir des prix à terme théoriques à partir d'un modèle à deux facteurs, il faut en effet estimer non plus deux paramètres, mais six (modèle MR) ou sept (modèle AS).

En termes de description de la structure par terme des prix, les performances des modèles s'améliorent avec l'introduction de variables d'état supplémentaires. En revanche, quel que soit le type de modèle considéré, ces performances diminuent au fur et à mesure que la maturité des contrats augmente. Ceci peut être au moins partiellement expliqué par la faible liquidité des marchés à terme de commodités pour les maturités les plus éloignées.

Les performances des modèles monofactoriels ne sont pas satisfaisantes, en particulier lorsque les commodités considérées sont insérées dans un processus industriel. Ces modèles, marquant les premières tentatives de l'utilisation des méthodes de valorisation relative dans les marchés de commodités, n'ont ensuite été développés que pour établir des comparaisons avec d'autres, plus sophistiqués. Schwartz (1997) indique que les erreurs de prévisions du modèle MR sont environ trois fois moins importantes que celles de son modèle monofactoriel, quels que soient les commodités et les échéances considérés.

## SECTION 5 : CONCLUSION

Si la théorie du stockage est le principal support théorique sous-tendant l'élaboration de modèles de structure par terme des prix des commodités, le développement de ce type d'outil a, en retour, permis de tester de nouvelles hypothèses et d'apporter de nouveaux éléments de compréhension du mécanisme de formation des prix dans un marché à terme de commodités.

En particulier, les modèles de valorisation relative ont conduit à mettre en évidence le fait que le *convenience yield* ne peut être exprimé comme une fonction déterministe du prix au comptant. Pour cela, il faudrait que le «confort» apporté par la détention de stocks soit toujours identique pour un niveau de prix au comptant donné. Or il est tout à fait envisageable qu'une variation du rythme de production, de transport, ou de transformation d'une marchandise ait un impact sur le *convenience yield*, sans se traduire immédiatement par une transaction sur le marché physique et donc par une modification du prix au comptant.

Par ailleurs, la prise en considération du comportement d'ajustement des opérateurs du marché physique aux variations du prix au comptant et les tests empiriques réalisés dans le cadre des modèles de structure par terme des prix des commodités ont permis de montrer que le comportement dynamique du *convenience yield* peut être exprimé par un processus de retour vers une valeur moyenne. Enfin, l'évaluation des performances du modèle AS devrait permettre de valider ou de rejeter l'hypothèse selon laquelle cette variable a un comportement asymétrique.

Sur le plan pratique, l'efficacité des stratégies de couverture fondées sur les modèles de structure par terme des prix à été mise en évidence par Brennan et Crew (1995). En particulier, une opération de couverture utilisant le modèle de Gibson et Schwartz (1990) domine très largement une opération utilisant un modèle monofactoriel pour représenter la structure par terme des prix des commodités.

Au-delà des remarques concernant l'hypothèse de marchés complets sous-tendant l'élaboration des modèles de structure par terme des prix des commodités, l'analyse présentée ici comporte des limites importantes. En premier lieu, ces modèles sont des modèles d'équilibre partiel : les éléments déterminant la formation du prix à

terme sont considérés comme exogènes. La question de la formation du prix au comptant, particulièrement importante dans le marché pétrolier, est ainsi éclipsée ; de même, la définition proposée pour le *convenience yield* résulte d'un choix plutôt que d'une véritable démonstration. Ainsi, dans un marché tel que celui du pétrole brut, où, compte tenu de la répartition géographique des réserves, l'éventualité de chocs sur l'offre ne peut être niée, ces modèles peuvent accompagner des stratégies à long terme, mais ne peuvent les déterminer.

Seconde limite importante, les taux d'intérêt sont considérés comme constants, ce qui se révèle d'autant plus gênant que l'analyse proposée se situe à long terme. Schwartz, en 1997, a proposé une extension du modèle MR en introduisant le taux d'intérêt comme troisième variable d'état. Si l'hypothèse de comportement asymétrique du *convenience yield* est vérifiée, un tel prolongement pourrait être envisagé pour le modèle AS<sup>19</sup>.

Enfin, l'essentiel des travaux réalisés à ce jour dans le domaine des modèles de structure par terme des commodités porte sur la capacité de ces modèles à représenter fidèlement la structure par terme des prix existante. Il reste beaucoup à faire en termes de prédiction des prix au comptant futurs.

## *BIBLIOGRAPHIE*

BLACK F., 1976 : « The pricing of commodity contracts », *Journal of Financial Economics*, n°3, p 167-179.

BLACK F., SCHOLLES M., 1973 : « The pricing of options and corporate liabilities », *Journal of Political Economy*, vol 81, 1973.

BLAU G., 1944 : « Some aspects of the theory of futures trading », *Review of Economic Studies*, vol 12.

---

<sup>19</sup> En termes de capacité à représenter la structure par terme des prix des commodités, l'intérêt de l'introduction du taux d'intérêt comme troisième variable d'état, pour les maturités rapprochées, paraît limité : les résultats établis par Schwartz à partir du modèle MR sont tout aussi satisfaisants que ceux du modèle à trois facteurs. Pour les maturités plus éloignées en revanche, Schwartz, qui dispose de données empiriques à long terme fournies par Enron, montre que les performances du modèle à trois facteurs sont supérieures.

- BRENNAN M.J., 1958 : « The supply of storage » *American Economic Review*, vol 47, n°1.
- BRENNAN M.J., CREW N., 1995 : « Hedging long maturity commodity commitments with short-dated futures contracts », Working Paper, The Anderson School, University of California, Los Angeles, juillet.
- BRENNAN M.J., SCHWARTZ E.S. [1985], « Evaluating Natural Resource Investments », *Journal of Business*, Vol 58, n°2, p 135-157.
- CORTAZAR G., SCHWARTZ E.S., 1998 : « Monte-Carlo Evaluation Model of an Undeveloped Oil Field », UCLA Working Paper #1-98.
- GIBSON R., SCHWARTZ E.S., 1989 : « Valuation of long term oil-linked assets », Working Paper, Anderson Graduate School of Management, University of California, Los Angeles.
- GIBSON R., SCHWARTZ E.S. [1990], « Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims », *The Journal of Finance*, Vol XLV, n°3, July.
- GIRAUD P.N., 1995 : « The equilibrium price range of oil ; economics, politics and uncertainty in the formation of oil prices » *Energy Policy*, vol 23, n°1, p 35-49.
- HILLIARD J.E., REIS J., 1998 : « Valuation of Commodity Futures and Options under Stochastic Convenience Yield, Interest Rates, and Jump Diffusions in the Spot », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol 33, n°1, mars, p 61-86.
- KALDOR N., 1939 : « Speculation and economic stability », *Review of Economic Studies*, vol VIII, n°1, octobre.
- KALDOR N., 1939 : « A note on the theory of the forward market », *Review of Economic Studies*, vol VIII, n°1, octobre.
- KEYNES J.M., 1930 : « *A Treatise on Money : The applied Theory of Money* » Londres, Macmillan, volume 2.
- SCHWARTZ E.S., 1997 : « The Stochastic Behavior of Commodity Prices : Implications for Valuation and Hedging », *The Journal of Finance*, vol LII, n°3, juillet.
- SCHWARTZ E.S., 1997 : « Valuing Long Term Commodity Assets », UCLA Working Paper, #7.

SIMON Y., 1995 : « *Marchés dérivés de Matières Premières et Gestion du Risque de Prix* », Collection Connaissance de la gestion, Economica.

SIMON Y., 1986 : « *Bourses de commerce et marchés à terme de marchandises* » Dalloz, 3<sup>o</sup> Edition.

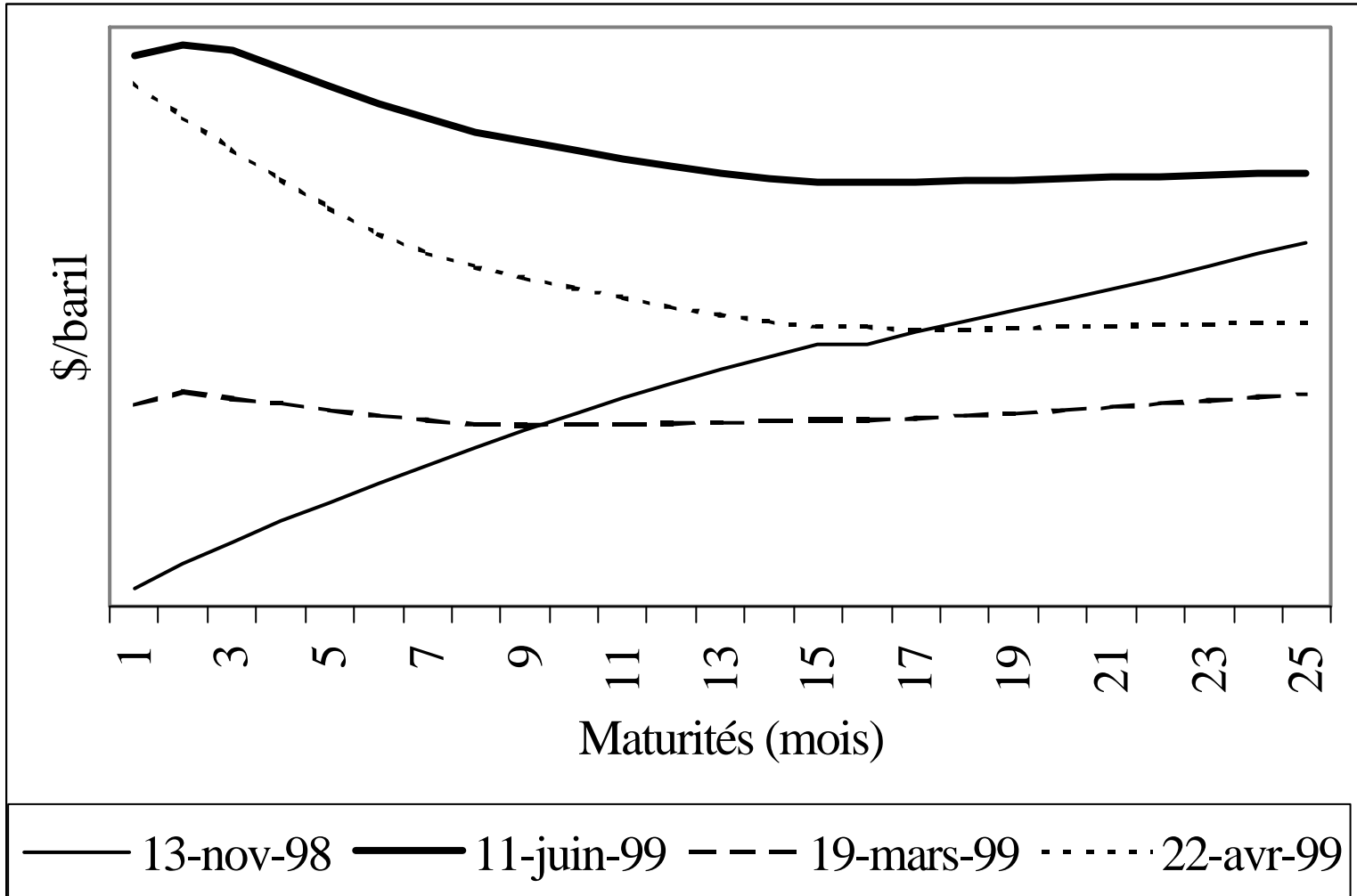
WEYMAR H., 1968 : « *The dynamics of the World Cocoa Market* », MIT Press.

WILLIAMS J., WRIGHT B., 1989 : « A Theory of Negative Prices for Storage », *The Journal of Futures Markets*, vol 9, n°1, p 1-13.

WORKING H., 1949 : « The Theory of the Price of Storage », *American Economic Review*, n°31.

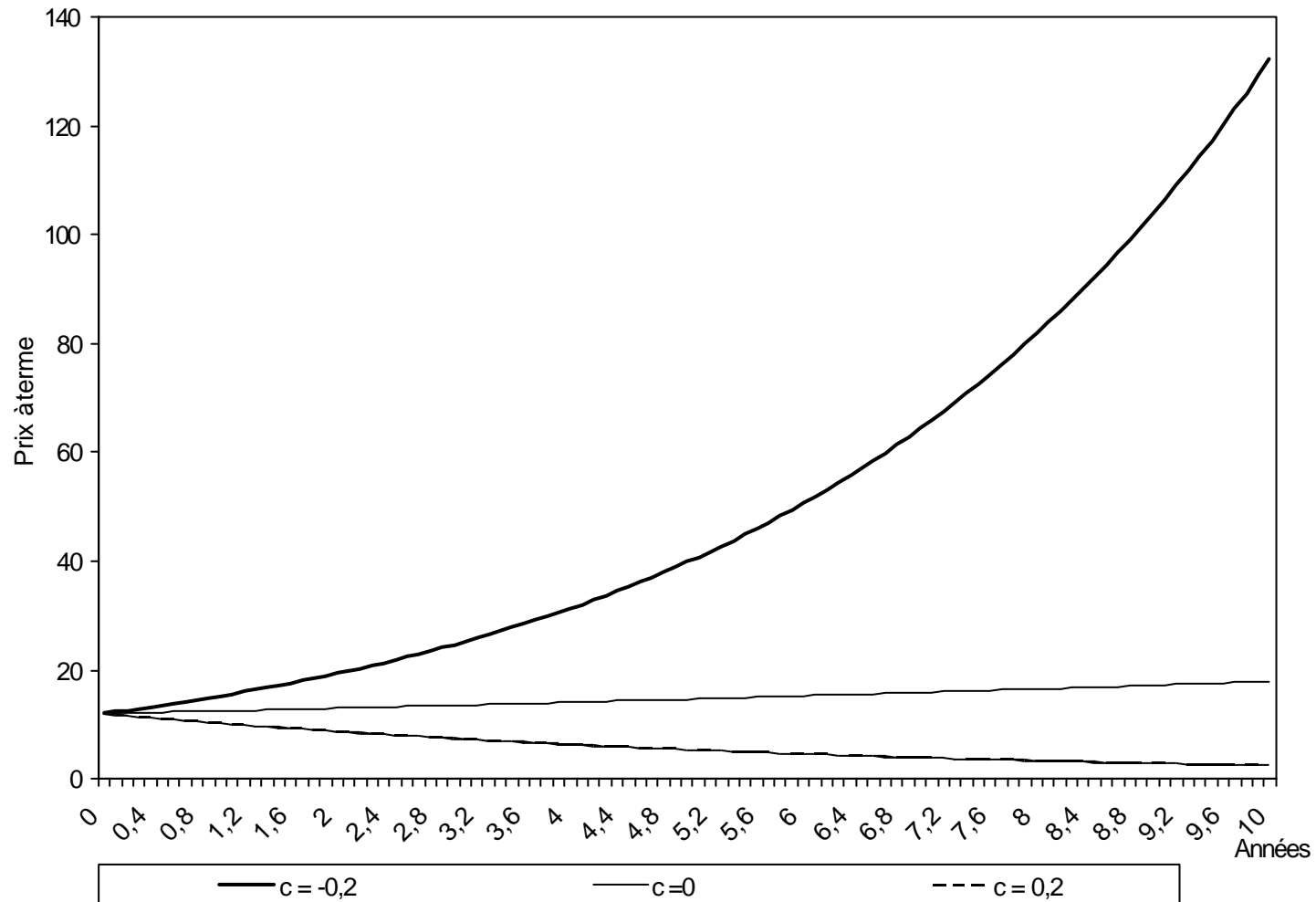
*Figure 1 : Modèle BG, impact d'une variation du taux d'intérêt*

$$S = 12, c = -0,2$$



*Figure 2 : Modèle BG, impact d'une variation du convenience yield*

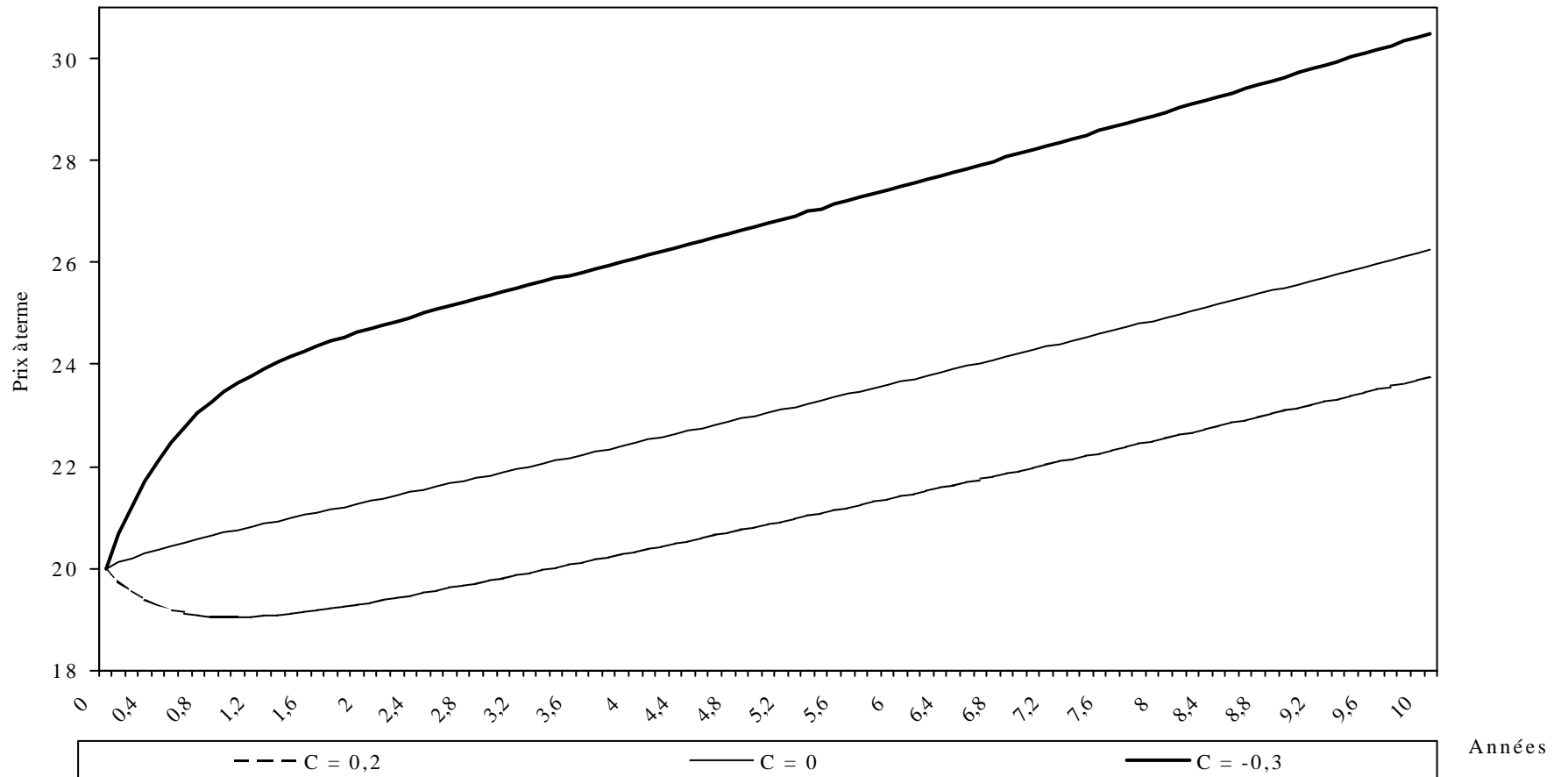
$$S = 12, r = 0,04$$





**Figure 3 : Modèle MR, impact d'une variation du convenience yield**

$S = 20$   $r = 0,06$   $a = 0$   $k = 2$   $r = 0,9$   $s_S = 0,3$   $s_C = 0,4$   $I = 0$



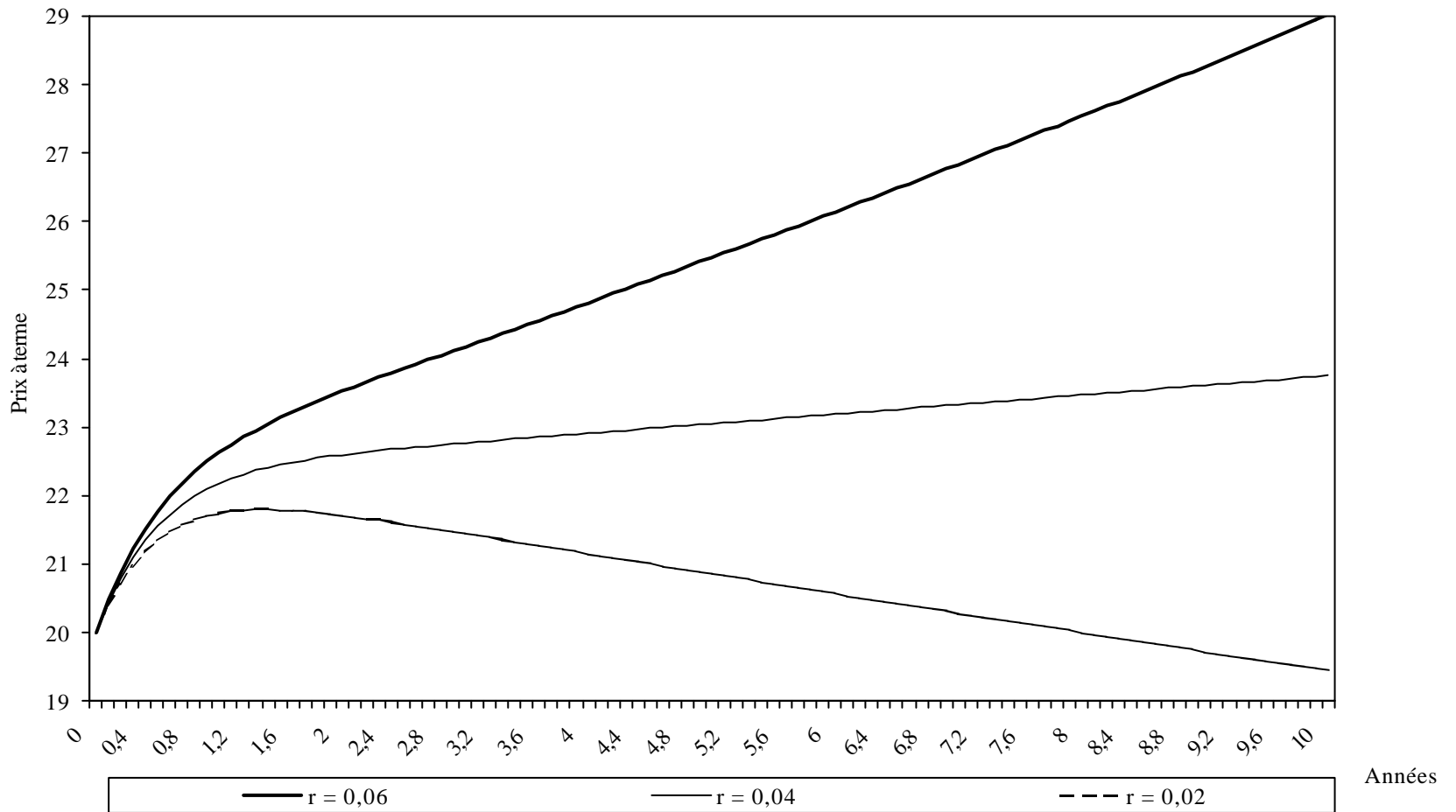
**Tableau 1 : Rapidité de la stabilisation de la courbe des prix en fonction de l'écart entre C et a**

$S = 20 ; r = 0,06 ; \alpha = 0 ; \kappa = 2 ; \rho = 0,9 ; \sigma_S = 0,3 ; \sigma_C = 0,4 ; \lambda = 0$

	C = -0.3		C = 0		C = 0,1	
Maturités	Prix	Variation(%)	Prix	Variation (%)	Prix	Variation (%)
0,2	21,23	2,74	20,21	0,48	19,88	-0,27
0,4	22,12	1,89	20,37	0,38	19,82	-0,12
0,6	22,77	1,34	20,51	0,33	19,80	0,00
0,8	23,26	0,98	20,63	0,30	19,83	0,08
1,2	23,92	0,58	20,87	0,28	19,94	0,18
1,4	24,16	0,47	20,98	0,27	20,02	0,20
1,6	24,36	0,40	21,10	0,27	20,11	0,22
1,8	24,54	0,36	21,21	<b>0,26</b>	20,20	0,23
2,2	24,85	0,30	21,43	0,26	20,40	0,25
2,4	25,00	0,29	21,54	0,26	20,50	0,25
2,6	25,14	0,28	21,66	0,26	20,61	<b>0,26</b>
3,2	25,55	0,27	22,00	0,26	20,93	0,26
3,4	25,69	<b>0,26</b>	22,11	0,26	21,03	0,26
4	26,09	0,26	22,46	0,26	21,36	0,26
5	26,78	0,26	23,05	0,26	21,93	0,26

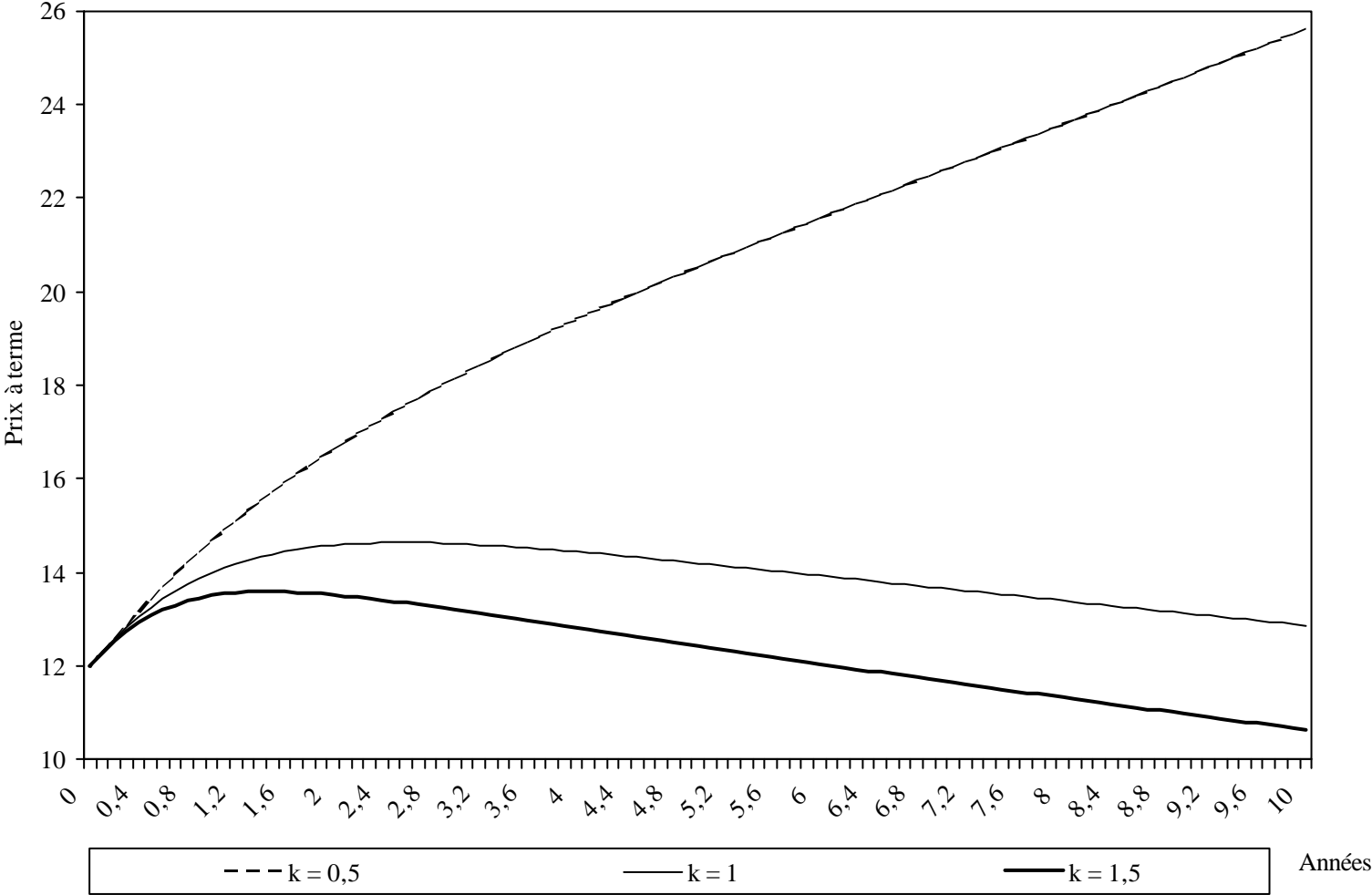
**Figure 4 : Modèle MR, Impact d'une variation du taux d'intérêt**

$S = 20, C = -0,2 \quad a = 0 \quad k = 2 \quad r = 0,9 \quad s_S = 0,3 \quad s_C = 0,4 \quad I = 0$



**Figure 5 : Modèle MR, impact d'une variation de la vitesse de convergence du convenience yield**

$$S = 12 \quad C = -0,2 \quad r = 0,06 \quad a = 0,1 \quad r = 0 \quad s_S = 0,1 \quad s_C = 0,2 \quad I = 0$$





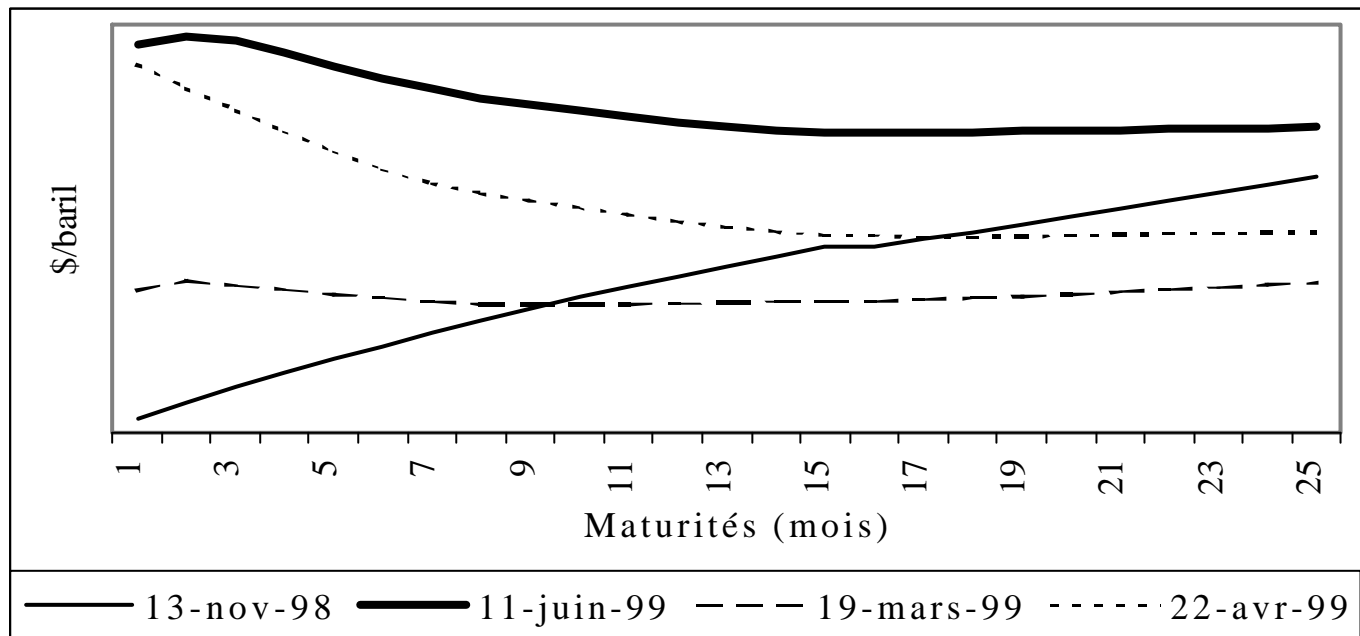
**Figure 6 : Dynamique du convenience yield lorsque  $b = 1$  et lorsque  $b = 0$**

$C_0 = 0,1$   $k = 2$   $a = 0$   $l = 0$   $s_s = 0,3$  maturité = 1,25 ans

Nombre de trajectoires simulées : 800

Nombre d'intervalles de discrétisation : 1000

Longueur du pas de discrétisation : 1/800



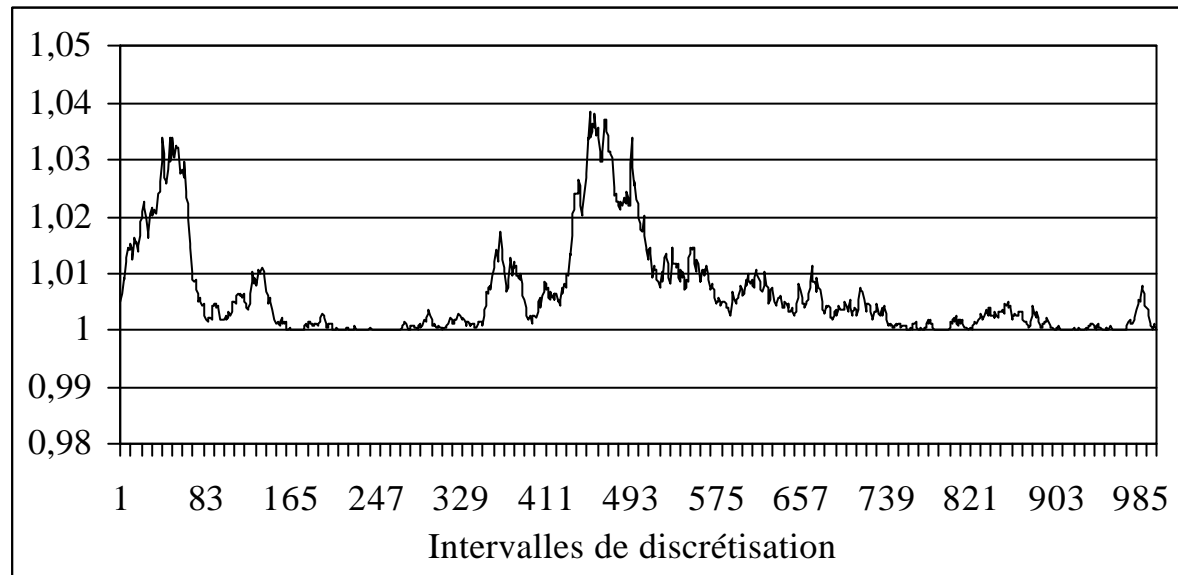
**Figure 7 :  $C(b = 1) - C(b = 0)$**

$C_0 = 0,1$   $k = 2$   $a = 0$   $l = 0$   $s_s = 0,3$  *maturité = 1,25 ans*

*Nombre de trajectoires simulées : 800*

*Nombre d'intervalles de discrétisation : 1000*

*Longueur du pas de discrétisation : 1/800*



*Figure 8 : Structures par terme des prix du pétrole brut sur le Nymex : quelques exemples*

