

LA RUPTURE D'EAU POTABLE : MODÉLISATION DE LA GESTION DES RÉSERVES

ALOÏS KANYINDA KASANDA
CAHIER DE RECHERCHE DU CEREG N° 2004 - 10

RÉSUMÉ. La question de la rareté de l'eau potable et de son inégale répartition se pose avec de plus en plus d'acuité. Plusieurs régions de notre planète sont exposées au risque de rupture d'eau potable. La gestion du risque de rupture peut être appréhendée et gérée comme un risque financier. Cet article modélise le risque de rupture d'une réserve d'eau et montre qu'il est possible d'apporter des solutions qui permettent d'atténuer ce risque de la même façon que l'on diminue les risques des titres dans un portefeuille d'actifs financiers en les diversifiant. A partir des méthodes d'optimisation nous constaterons que ce risque de rupture ne s'élimine pas totalement. Il exige de recourir à d'autres solutions qui se matérialisent sous forme d'options réelles.

Date: Novembre 2004.

Je remercie le professeur H. Geman pour tous les conseils prodigués durant l'élaboration de cet article, monsieur Haddad Ali pour son soutien informatique, messieurs Alain Kasanda et Camille Modiano pour la lecture et les corrections qu'ils ont apporté à ce document. Je remercie enfin ma famille et en particulier ma soeur Angelique MBiya.

Alois Kanyinda Kasanda, CEREG-Université Paris Dauphine.

INTRODUCTION

L'eau joue un rôle économique et social important dans nos sociétés. Elle est considérée comme une matière première de demain. Elle devient un bien rare dans certaines régions de la planète. Plus l'eau est rare, plus son enjeu stratégique à l'échelle mondiale s'affirme. Elle est de plus en plus convoitée et constitue une source majeure des conflits dans certaines parties du monde.

Les conséquences d'un épuisement total de l'eau seront catastrophiques du point de vue économique et sociale. Un tel phénomène remettrait en cause la survie humaine car l'eau n'est pas substituable. L'épuisement du pétrole ou d'une autre source d'énergie peut outre mesure se substituer et les conséquences de ce dernier ne se limitent qu'à la sphère économique.

La prise de conscience de l'importance du déficit d'eau à l'échelle mondiale et les conséquences de ce dernier ont conduit la communauté internationale, l'ONU, les entreprises de gestion d'eau et les associations à agir ensemble pour trouver des solutions aux problèmes locaux. L'objectif étant la mise en place d'une gestion durable de cette ressource. Dans cette perspective, une entreprise ou une entité économique peut, selon nous, gérer correctement un risque de rupture en poursuivant le souhait de la communauté internationale d'une gestion durable et en adoptant une politique optimale de gestion de ses réserves d'eau.

Cet article présente un modèle de gestion optimale d'une réserve d'eau qui passe par un programme de minimisation des coûts d'exploitation et de maximisation¹ de la réserve.

La gestion du risque de rupture de l'eau est dans cette perspective modélisée à partir d'un projet séquentiel², lequel est quantifié à partir de la méthodologie des options composées. Dans ce projet séquentiel, le passage d'une phase à une autre exige néanmoins une ou plusieurs décisions stratégiques et dépend surtout du résultat de la phase précédente. Nous supposons les deux premières phases³ validées et nous nous proposons de présenter la troisième phase, celle de l'exploitation.

L'article s'articule en trois sections. La première section présentera une vue d'ensemble du problème de la rareté de l'eau. La deuxième exposera les mécanismes de l'optimisation dynamique. Dans la dernière

¹La maximisation correspond à une gestion de la réserve qui se soucie de la réduction du gaspillage, qui gère correctement les réseaux d'adduction pour éviter les fuites, etc.

²Dans cet article, nous nous réservons de présenter uniquement la troisième phase car l'intérêt de l'article se trouve dans la modélisation du risque de rupture. L'évaluation du projet séquentiel fera l'objet d'un article à part entière.

³La Phase d'exploration et la phase de construction d'infrastructure sont considérées validées.

section notre propos sera davantage axé sur la gestion des ruptures. Un modèle de gestion du risque de rupture d'eau , "mini-max", est proposé.

1. L'EAU : UNE RESSOURCE À RISQUE

1.1. Les origines d'une rupture d'eau. En observant la quantité mondiale des réserves d'eau il serait facile de penser que l'eau est inépuisable. Cette réalité est certainement vraie pour une partie des régions du monde mais elle l'est beaucoup moins pour d'autres régions.

Avec la croissance démographique très rapide, la déforestation, le changement climatique causé par les gaz à effet de serre dont on ne connaît pas encore l'impact réel, la pollution et le gaspillage, l'eau vient déjà à manquer dans certaines régions. Le Moyen Orient, certaines régions d'Afrique, le Sud de l'Italie, l'ouest des États-Unis et bien d'autres régions de notre planète connaissent déjà une pénurie réelle et profonde.

De plus, au fur et à mesure que la population mondiale s'accroît, la pénurie s'installe et l'eau devient un bien rare et source potentielle de conflits économiques et de guerres. Cette pénurie est alarmante car elle compromet déjà le développement économique et social de certaines régions. Le manque d'eau progresse à un rythme que tous les experts, (de l'ONU, des instituts spécialisés et des entreprises privées du secteur de l'eau), jugent dangereux pour l'avenir de l'humanité. Les projections de ces mêmes experts montrent qu'avant l'an 2050 la demande humaine d'eau, dans toutes ses formes, dépassera l'offre. De ce fait, il est important de prendre conscience de ce risque et de poser le problème d'une gestion optimale et équitable de cette matière première.

Un grand débat sur la pénurie de l'eau a été engagé au niveau mondial depuis la conférence de Rio en 1992. La gravité de la pénurie actuelle et la prise de conscience mondiale de ce phénomène ont incité tous les acteurs, institutionnels et privés, à chercher les solutions à ce problème au delà des frontières nationales.

L'eau est une ressource vitale et rare. Elle est devenue une source d'enjeux importants et d'une compétition farouche. D'une manière générale, l'univers dispose suffisamment d'eau douce pour satisfaire aux besoins immédiats de l'humanité. Mais comme le pétrole ou la plupart des matières premières naturelles, l'eau est inégalement répartie sur la surface du globe (voir graphique) ; en conséquence certaines régions sont affectées par des pénuries chroniques.

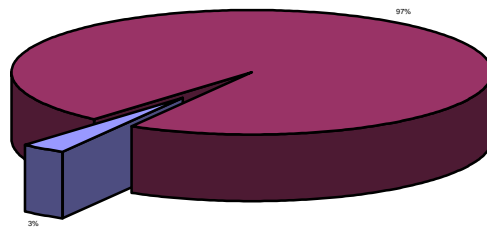


FIG. 1. La répartition du stock mondial de l'eau.
Mers et Océans : 97,2 %. Eaux liquides continentales et glaciers : 2,8%.

L'eau n'est pas partagée de façon équitable entre les régions et les individus. Son inégale répartition géographique au niveau mondial s'explique par une répartition naturellement non équitable des eaux de pluie. Il suffit d'observer et de comparer l'attribution des flux des eaux de pluie avec la densité de populations dans certaines régions pour se rendre compte de la gravité du déséquilibre. Cette situation renforce davantage le problème de pénurie d'eau potable et fait d'elle une source de conflits entre États.

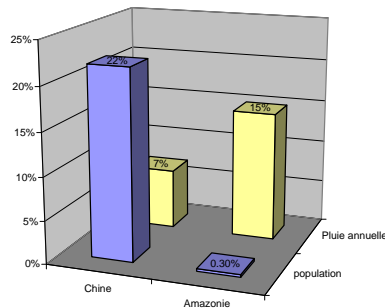


FIG. 2. L'inégalité entre les flux d'eau de pluie et la population
 Source : PriceWaterCoopers. L'eau : une problématique financière mondiale mars 2001.

La Chine qui abrite 22% de la population mondiale ne reçoit qu'un flux d'eau de pluie insignifiant, environ 7 % des eaux de pluie annuelle totale alors que l'Amazonie avec seulement 0,3 % de la population mondiale en reçoit presque le double. L'importance et la gravité de cette inégalité flagrante ne se limitent pas qu'à cet exemple. Car comme le montre la figure suivante, cette inégalité est généralisée au niveau mondial. Plus de la moitié des eaux de pluie mondiales sont partagées par seulement 7 pays.

Dans les régions riches en eau, par exemple en Europe, la question ne se pose pas en termes de pénurie mais se présente plutôt en termes des normes de qualité et d'assainissement avant rejet à la nature. Les exigences sur les normes proviennent de l'intérêt grandissant, sur le plan mondial, de la demande en eau potable de bonne qualité. Ces normes atteignent parfois un niveau d'exigence très élevé.

Le respect de ces normes exige un effort de financement très important, souvent supérieurs aux ressources de certaines municipalités. L'exception européenne vient de l'Espagne et d'une partie de l'Italie où la question de l'eau se pose en termes de rareté.

1.2. Les autres causes de la raréfaction de l'eau. Notre propre utilisation de l'eau dans toutes ses formes constitue aussi un facteur

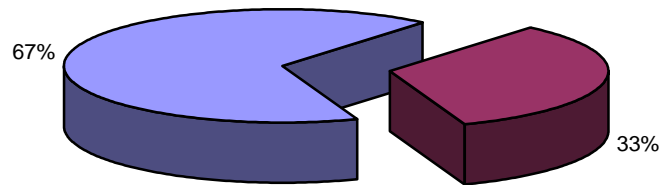


FIG. 3. La répartition mondiale des eaux de pluie Canada, Russie, Brésil, Indonésie, Colombie, Inde et États-Unis (67 %) et reste du Monde (33 %). Source : PriceWaterCoopers.

déterminant de la raréfaction de l'eau potable. Rappelons toute fois que l'eau est utilisée pour une consommation domestique, industrielle et enfin pour une consommation agricole (l'irrigation).

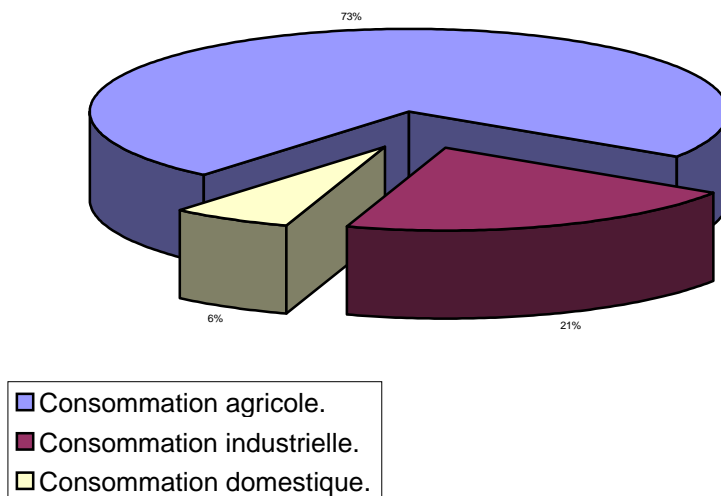


FIG. 4. La consommation de l'eau par catégorie d'utilisateur source : Pierre Roussel (2000)

Ces différentes demandes d'eau sont un vecteur aggravant de la pénurie d'eau potable. Toutes les sources s'accordent à affirmer que c'est la croissance démographique et le développement incessant des zones urbaines qui sont les véritables vecteurs de cette forme de pénurie. L'augmentation rapide de la population urbaine s'accompagne d'une hausse de la demande, d'un besoin important d'infrastructures ou de l'accès à l'eau.

La situation actuelle laisse apparaître tous les signaux d'une pénurie évidente et durable à l'horizon 2025-2050. Il suffit de considérer les seules prévisions sur l'évolution de la population mondiale pour se rendre compte qu'avec 10 milliards d'habitant sur terre en 2050, la demande de l'eau se sera considérablement accrue et donc que la pénurie d'eau potable s'aggravera.

Face à cette situation, notre vision s'inscrit dans les choix des politiques alternatives de gestion de la ressource car malgré les efforts fournis sur ce plan, en réalité aucun pays ne semble aujourd'hui bien préparé devant les scénaris catastrophiques qui sont envisageables si rien n'est fait d'ici à l'an 2025.

Au delà du problème de la raréfaction qui caractérise l'état actuel de la ressource en eaux disponibles, s'ajoute un autre problème qui prive l'accès à l'eau à plus de la moitié de la population mondiale et particulièrement dans les pays en développement, celui des réseaux d'adduction et d'assainissement d'eau.

Le financement des réseaux et des infrastructures reste une priorité urgente qui devraient être supportée par la solidarité nationale et internationale. Pour aider les pays en voie de développement à résorber leur retard et à accéder dans des meilleures conditions à la ressource, les bailleurs de fonds internationaux comme la Banque Mondiale, les Institutions des Nations Unies, la Banque Africaine de Développement et les organismes bilatéraux et multilatéraux devraient davantage faciliter l'accès aux prêts et aides au financement.

La pénurie mondiale de l'eau, structurelle ou conjoncturelle, peut être atténuée, voire évitée, en mettant en place différentes formes de gestion intégrée des réserves d'eau. Cette gestion met en évidence des solutions exprimées comme des options réelles⁴ et évaluables à partir des méthodes modernes utilisées en finance, "contingente claim". Notre approche méthodologique consiste donc à appliquer la théorie des options aux problèmes relatifs à la production et à la distribution d'eau potable.

1.3. Les risques et les options réelles dans l'industrie de l'eau.

Comme dans tous les secteurs d'activité, l'industrie de l'eau n'échappe pas aux divers risques à des niveaux différents du processus de production et de gestion des réserves. Cette sous-section présente certains de ces risques en dehors de notre principal risque, celui de rupture des réserves.

⁴Ces solutions seront analysées dans notre article sur l'application des options réelles à l'industrie de l'eau.

1.3.1. *Les risques spécifiques à l'industrie de l'eau.* Le caractère social de l'eau peut laisser penser que les investissements dans ce secteur sont moins risqués que dans les autres industries. Ceci n'est qu'une illusion dans la mesure où l'incertitude dans ce secteur porte d'abord sur l'existence en quantité réelle des réserves d'eau. Le second élément qui justifie la présence de l'incertitude des projets d'investissement dans l'industrie de l'eau est la considération de la durée de vie très longue d'un projet d'exploitation, (en moyenne 25 ans) dans une région exposée au risque intense de rupture. Il n'est pas toujours possible de prévoir avec précision dans ces régions que les quantités d'eau seront suffisantes pour satisfaire aux besoins des populations. Cette longue périodicité des projets agrandit encore l'incertitude sur les flux futurs, (les cash flows, les coûts d'investissement, les prix des inputs, le taux d'intérêt etc.).

La présence de cette incertitude sur les projets d'investissement, sur les indicateurs économiques et financiers et sur les variables d'état nécessite une couverture et contribue à l'existence des conditions d'applicabilité de la théorie des options réelles à l'industrie de l'eau. L'intérêt de cette théorie est de pouvoir réduire et couvrir les risques liés à l'incertitude en valorisant la flexibilité implicite des projets d'investissement. La compagnie des eaux, en utilisant les options réelles dans les conditions d'incertitude se donne par exemple le droit d'investir à tout moment dès lors que les informations qu'elle a recueillies sur les variables d'état lui préconisent une réponse positive. Dans ce cas, la compagnie choisit son timing d'investissement, en retardant son départ du temps nécessaire. L'avantage d'un pareil comportement face à l'incertitude est d'une part la remise en cause de la règle traditionnelle d'investissement et d'autre part la meilleure gestion des risques prévisibles. Cette couverture se fait à partir des options d'exploitation (l'arrêt momentané, l'abandon définitif, l'échange d'un actif contre un autre etc.)

Les investissements complets dans un projet de l'eau se font en trois phases. L'une des trois phases correspond à l'exploration des sites. C'est cette phase qui conditionne la poursuite du reste de projet. Elle est assimilable à un projet de Recherche et Développement car à ce niveau d'investissement le projet ne dégage pas encore les cash flows. Cette phase exige d'importantes dépenses et est doublement risquée. Le premier risque tient à l'irréversibilité des coûts engagés qui contient le risque de ne pas aboutir au résultat espéré. Un risque supplémentaire peut provenir d'une évaluation erronée des réserves. La conséquence immédiate est la mauvaise stratégie d'exploitation qui résulterait de cette évaluation. Dans ce cas de figure, les options réelles permettent de se représenter une vision stratégique d'exploitation et de ré-allouer autrement ses flux de dépense.

Le risque relatif à la conception des infrastructures et à la décision d'exploitation qui représentent respectivement le deuxième et troisième phase du projet d'investissement, résulte de la possibilité de se tromper sur la capacité optimale des infrastructures à construire, sur la technologie optimale et enfin sur l'incertitude des flux futurs générés par le projet d'investissement. L'ensemble de ces trois phases constitue une forme d'investissement séquentiel pouvant se valoriser comme une option réelle. L'investisseur débourse des sommes importantes durant la première phase sans être certain d'obtenir un résultat. Ceci est possible car il dépense progressivement le montant d'investissement destiné à chaque étape. Comme pour un investissement en Recherche et Développement, la valeur actuelle nette de cette étape peut être négative.

Le risque d'une mauvaise appréciation de la progression de la demande ou de l'augmentation substantielle des taux de desserte est envisageable. Il est important de gérer ce risque car les conséquences qu'il engendre sont nuisibles et conduisent à une rupture dans la série de distribution. Les projections sur l'évolution en volume de consommation doivent être faites avec précision. Un risque s'ajoute à celui du manque d'eau, c'est celui de ne pas atteindre des objectifs fixés en termes de nouveaux branchements au réseau. Ce risque est fonction du maintien, de la hausse ou de la baisse du niveau de vie, donc de l'environnement économique. Pour faire face à ce dernier risque, l'entreprise peut entrevoir une étude de marché qui définira le type de branchement souhaité, selon la consommation envisagée.

Les entreprises privées de l'eau investissent aussi à l'extérieur des frontières nationales. Là, elles sont soumises aux risques pays, risque de taux de change etc. En France par exemple, la Lyonnaise des Eaux est passée du statut de groupe français de distribution d'eau à celui d'une entreprise mondiale. Ce nouveau statut est favorisé par l'augmentation des appels d'offres internationaux qui aboutissent aux grands contrats tels que Buenos Aires, Casablanca, Atlanta, Amman etc. L'acquisition de ces grands contrats est la conséquence d'un savoir faire financier reconnu. Il faut ensuite nouer des partenariats locaux avec le soutien d'acteurs financiers comme la Banque Mondiale, La Banque Africaine de Développement etc. Ces différents contrats ne sont pas de même nature. Chaque contrat est particulier, mais certains grands principes s'en dégagent :

- La maîtrise du risque financier et technique de la distribution de l'eau est de mise. Cette maîtrise est nécessaire pour aboutir aux objectifs à moyen terme et faire progresser rapidement le service de l'eau qui souvent, n'est pas adapté à la réalité du système en place. Cette maîtrise sous-entend globalement trois composantes :

- (1) La maîtrise technique de production. Il faut évaluer les risques, identifier les techniques adaptées à l'environnement auquel appartient le service de l'eau. Il faut définir un ordre, une méthode de travail et une méthode de mise en oeuvre de ces techniques.
- (2) Une composante de management. Avec un nombre réduit de spécialistes et d'experts, il faut parvenir à former la main d'oeuvre locale capable de faire face aux diverses crises possibles.
- (3) Une composante financière. Elle consiste à trouver des partenaires financiers capables de financer de grands projets d'investissement en infrastructures.

- comment alimenter en eau les quartiers défavorisés qui n'ont pas assez de revenus pour financer totalement leurs besoins en eau ?
- Comment gérer des systèmes d'eau qui ne sont alimentés que quelques jours par semaine ?
- Comment répondre au marché industriel et agricole (irrigation) en plus du marché de l'eau potable ?
- quelle politique de prix appliquer pour permettre l'accès à l'eau pour tous ?
- Faut-il envisager un transfert de technologie vers les pays en développement ou faut-il se contenter d'envoyer les experts qualifiés ?

D'autres risques existent. Imaginons une entreprise qui importe l'eau pour compenser le déficit quotidien ; cette entreprise achemine l'eau par pipeline. Ce moyen de transport comporte un risque lorsqu'il y a des guerres ou s'il y a conflit avec les pays que traverse le pipeline. Dans ces conditions, la valeur du projet peut être affectée par des décisions indépendantes de l'exploitant. La théorie des options réelles pourrait fournir les outils nécessaires pour la couverture de cette forme de risque.

1.3.2. *Le risque redoutable.* Les différents risques précédemment décrits, sont quasi prévisibles et donc nécessairement gérable à partir des options réelles classiques. Le risque de rupture d'eau est une autre forme de risque de l'industrie de l'eau. C'est le risque le plus dangereux et le plus redoutable car ses conséquences sont néfastes et désastreuses. Il peut considérablement et durablement affecter les populations au niveau économique et social. Il est parfois à la base de la désertification des régions entières et d'exode rurale dont les conséquences sont catastrophiques pour les pays concernés⁵. Il peut apparaître à tout moment dans certaines régions où la pression hydrique est considérable. Ses

⁵La pénurie de l'eau qui s'accompagne d'une exode rurale pose divers problèmes pour les agglomérations. Elles doivent planifier l'extension des villes et l'aménagement du système d'adduction, ce qui n'est pas gagné d'avance dans ce pays en déficit hydrique qui sont en grande partie des pays en développement où les problèmes d'ordre budgétaire sont importants.

causes sont généralement liées aux risques d'ordre naturelle ou structurelle (sécheresse, manque de pluie prolongé) ou encore d'origine humaine, (une forte pression sur les réserves d'eau à faible capacité de regeneration ou sur les réserves non renouvelables). La gestion de ce risque est indispensable et nécessite l'utilisation des méthodes spécifiques et parfois coûteuses. Ces méthodes présentées sous forme d'options donnent, une fois exercée, le droit et non l'obligation de construire des unités de production, (unité de dessalage, unité de retraitement, Les systèmes de retention d'eau de pluie ou encore l'importation de l'eau). Ces différentes unités apportent une solution sous forme de couverture au risque de rupture au même titre qu'une option financière ou un contrat à terme couvre un risque de hausse du taux d'intérêt ou du prix d'un actif financier et d'une matière première. Cette couverture permet une suppression partielle ou totale du risque considéré.

La difficulté de ce type d'options réelles se révèle au moment de son identification comme des options d'achat ou de vente, de type européen ou américain. Cette difficulté se ressent davantage à la valorisation de ces options d'autant plus qu'elles ne sont pas par principe négociables sur le marché financier au même titre que les options financières et donc du domaine des marchés incomplets. Malgré toute la difficulté que pose ces option et compte tenu du degré du risque de rupture actuel au niveau mondial, il nous semble important d'utiliser ces options. Elles garantissent la régularité de la distribution d'une denrée alimentaire indispensable à la survie humaine et donc contribue au bien-être individuel.

Nous montrerons dans la section "application" que ce risque peut se gérer au mieux et la date de rupture repoussée ultérieurement en envisageant une vision de gestion durable de l'eau. Malgré cette vision, actuellement préconisée par beaucoup d'expert et des Organismes Non Gouvernementaux, le risque de rupture reste toujours présent d'où la nécessité de veiller de façon continue.

2. MÉTHODOLOGIE.

La méthode d'optimisation dynamique nous sert dans le développement de notre modèle "mini-max". Il nous semble donc nécessaire et important de présenter de façon succincte cette méthodologie.

2.1. L'optimisation dynamique. L'optimisation dynamique est utilisée en finance pour construire les variables optimales qui permettent d'obtenir une allocation optimale de la richesse entre d'une part de consommation et d'autre part un portefeuille d'actifs. Ce portefeuille est composé d'un actif risqué et d'un actif sans risque. Les fonctions d'utilité de (consommation et de richesse) jouent un rôle important. L'objectif est la maximisation de deux quantités représentant la consommation d'une part et la richesse terminale d'autre part, soit :

$$\max E \left[\int_0^T u(c, t) dt + X(W(T)) \right] \quad (2.1)$$

Le prix P_0 est sans risque alors que celui de l'actif risqué suit un mouvement Brownien géométrique.

$$\frac{dP_0}{P_0} = r dt \quad (2.2)$$

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dz \quad (2.3)$$

Dans ces expressions, r est le taux sans risque et μ et σ sont constants.

Le portefeuille est constitué de θ_1 part de l'actif sans risque et de θ_2 de l'actif risqué. Il s'écrit

$$\theta_1 P_0 + \theta_2 P \quad (2.4)$$

Après différenciation et simplification nous obtenons

$$P_0 d\theta_1 + P d\theta_2 + \theta_1 dP_0 + \theta_2 dP = -c(t) dt \quad (2.5)$$

Si nous considérons que le portefeuille finance le processus de consommation, il en résulte alors l'expression

$$\begin{aligned} \frac{dW}{W} &= \frac{\theta_1 P_0}{W} \frac{dP_0}{P_0} + \frac{\theta_2 P}{W} \frac{dP}{P} - \frac{c(t)}{W} dt \\ &= (1-w)r dt + w \frac{dP}{P} - \frac{c(t)}{W} dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

soit encore

$$dW = [w(\mu - r)W + rW - c(t)] dt + w\sigma W dz \quad (2.7)$$

w est la part de la richesse investit dans l'actif risqué et $(1-w)$ la part investit dans l'actif non risqué. Le problème à résoudre est celui de contrôle de la richesse à partir d'une allocation entre la consommation et l'investissement (c, w) . L'agent économique maximise son espérance

d'utilité de sa consommation agrégée dans le temps à laquelle s'ajoute l'utilité espérée de sa richesse finale.

– **La résolution explicite.**

Si nous utilisons l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman dans un choix de portefeuille où l'agent recherche uniquement la maximisation de l'utilité de sa richesse, nous aboutissons aux résultats suivants

Avec une seule variable d'état qui suit l'équation stochastique de la richesse, la commande est donnée par la variable w qui correspond à la part à investir dans l'actif risqué. L'équation de HJB s'écrit

$$J_t + \max_w \left[J_w(w(\mu - r)W + rW) + \frac{1}{2}w^2\sigma^2W^2J_{ww} \right] = 0 \quad (2.8)$$

En maximisant, nous obtenons

$$w^* = -\frac{J_w}{WJ_{ww}} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \quad (2.9)$$

En substituant l'équation (2.9) dans l'équation de HJB nous obtenons

$$-\frac{1}{2} \frac{J_w^2}{J_{ww}} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 + rWJ_w + J_t = 0 \quad (2.10)$$

et les conditions aux bornes sont

$$J(W(T), T) = \frac{W^\gamma(T)}{\gamma} \quad \text{et} \quad J(0, t) = 0. \quad (2.11)$$

La solution de l'équation (2.10) s'obtient en se référant à une solution de type

$$J(W, t) = h(t) \frac{W^\gamma}{\gamma},$$

ce qui donne

$$h' \frac{W^\gamma}{\gamma} + r h W^\gamma + \frac{1}{2} h \frac{W^\gamma}{1-\gamma} \left(\frac{\mu-r}{\sigma} \right)^2 = 0$$

Avec $h(T) = 1$ comme condition aux bornes, nous obtenons :

$$\frac{h'}{h} = \gamma \left(r + \frac{1}{2(1-\gamma)} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \right) \quad (2.12)$$

En posant

$$\eta \triangleq \gamma \left(r + \frac{1}{2(1-\gamma) \left(\frac{\mu-r}{\sigma} \right)^2} \right)$$

l'on obtient $-dh/h = \eta dt$ avec $h(t) = 1$. Par intégration de h et incorporation dans J , il vient

$$J(W, t) = e^{\eta(T-t)} \frac{W^\gamma}{\gamma} \quad (2.13)$$

La part à investir dans l'actif risqué est

$$w^* = \frac{\mu-r}{\delta\sigma^2}, \quad \text{avec} \quad \delta \triangleq 1 - \gamma$$

Pour un agent économique qui souhaite maximiser à la fois son utilité pour sa consommation et pour sa richesse, la solution s'écrit de la façon suivante

$$c^*(t) = \frac{\lambda W(t)}{1 - e^{-\lambda(T-t)}} \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{\left[\rho - \gamma \left(r + \frac{1}{2(1-\gamma)} \left(\frac{\mu-r}{\sigma} \right)^2 \right) \right]}{1 - \gamma} \quad (2.14)$$

et

$$w^* = \frac{\mu - r}{\delta \sigma^2}, \quad \text{avec} \quad \delta \triangleq 1 - \gamma. \quad (2.15)$$

– État de l'art sur la programmation dynamique en finance moderne

Merton utilise la programmation dynamique dans son article fondateur où il introduit l'analyse en temps continu et dégage des équations d'optimalité qui maximisent la consommation de l'agent et sa richesse finale. M. Jeanblanc-Piquet et Poitier (1990) adoptent la même démarche et une combinaison de processus de prix continu et à saut. Elles utilisent un modèle avec trois actifs dont deux actifs risqués (actions) et un actif sans risque (obligation). Le prix des actifs risqués est stationnaire. En utilisant les résultats de I.Karatzas, J.P. Lehoczky & S. E. Shreve (1987), M. Jeanblanc-Piquet et Poitier offrent les stratégies admissibles pour lesquelles la richesse du petit investisseur reste positive.

Thaleia Zariphopoulou (1994) aborde la même problématique pour un agent qui consomme et investit dans un modèle à deux actifs. Étendant le modèle de Merton (1969), elle pose le problème de contrôle stochastique avec une contrainte. Cette vision du problème a été proposée par de nombreux auteurs, Shreve et Soner (1991), He et Pearson (1989), Shreve et Xu (1992), Fleming et Zariphopoulou (1991), Duffie, Fleming, Soner et Zariphopoulou (1997) et Cvitanic & Karatzas (1993). Aujourd'hui, les techniques de la programmation dynamique sont appliqués à la théorie des options réelles. Plusieurs études le démontrent, notamment les travaux de J. Hlouskova et al (2001), Kassar et Lasserre (2002) qui adoptent les techniques de la programmation dynamique pour déterminer la valeur de la bio diversité à partir du concept des options réelles. Il est important de noter que l'utilisation du modèle d'optimisation et des autres méthodes classiques de valorisation des options ne trouve pas toujours une solution théorique explicite. Dans ce cas, l'usage des méthodes numériques s'impose. Fitzpatrick et Fleming (1991) ont fourni dans ce domaine des résultats numériques remarquables.

L'utilisation de la programmation dynamique dans note article se base sur ces travaux et propose un modèle de gestion de risque de rupture

qui aboutit au résultat selon lequel ce risque peut s'atténuer mais ne s'efface pas complètement.

3. MODÉLISATION

La phase d'exploitation et de production d'eau coordonne à la fois le pompage, le traitement, le retraitement et la distribution. Chaque niveau de la chaîne génère un coût. L'objectif de l'entreprise est de minimiser ces différents coûts et de maximiser la quantité initialement contenue dans la réserve pour faire face à un risque éventuel de rupture. Cette section traite en termes économiques et financiers la question de la gestion de risque de rupture d'une réserve d'eau potable. Elle propose concrètement la façon de mieux gérer l'offre qui provient directement de la réserve et celle qui provient des autres sources d'alimentation.

Le graphe ci-dessous donne une vue d'ensemble des différentes décisions qui s'offrent à l'entreprise. Les décisions retenues à chaque phase contribuent efficacement aux solutions conduisant à une gestion optimale et durable d'une réserve d'eau dans une région à déficit chronique d'eau.

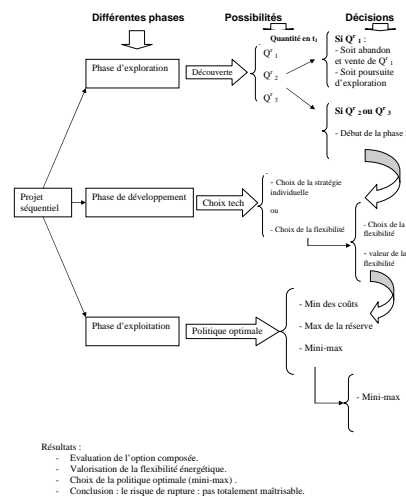


FIG. 5. L'arbre de décision.

La première décision concerne l'évaluation de la quantité d'eau disponible et de son impact sur le déroulement du projet. L'aspect quantité joue un rôle primordial dans notre modèle car c'est un facteur principal qui assure les cash flows futurs de l'entreprise une fois le projet achevé. La deuxième décision porte sur le choix stratégique en termes

de politique énergétique. L'intérêt de poser le problème de politique énergétique, se trouve dans le gain que peut réaliser l'entreprise en termes des coûts si elle choisit par exemple une technologie qui intègre une flexibilité. La troisième décision concerne la mise en place d'une politique permettant la réduction totale ou partielle du déficit d'eau.

3.1. Le contrôle optimal et le risque de gestion des réserves.

Cette sous section modélise le risque de rupture d'une réserve d'eau. L'entreprise, dans sa mission de garant de la distribution d'eau, se fixe deux objectifs. Elle cherche d'une part, à minimiser les coûts d'exploitation et d'autre part, à maximiser la quantité initiale de la réserve. Cette politique se traduit par une gestion efficace de l'offre. Concrètement, l'entreprise cherche à mettre en place une politique de gestion de réserve qui rend négligeable la probabilité d'occurrence des ruptures.

Nous supposons que lorsque l'offre qui provient directement de la réserve est insuffisante, l'entreprise peut utiliser les solutions alternatives. Dans ce cas, elle s'oriente vers des sources secondaires d'approvisionnement : le retraitement, le dessalement, l'importation.

– Les caractéristiques de la réserve

- (1) La réserve est dotée à l'origine d'une quantité $Q_0^r \geq 0$. Cette quantité correspond à une dotation initiale en $t = 0$.
- (2) Elle est progressivement alimentée par une quantité aléatoire notée A . Cette quantité provient, par hypothèse, d'une seule et unique source d'alimentation : la pluie. Il est possible que la réserve ne soit pas alimentée pendant une période, notamment en saison de sécheresse.

La pluie joue un rôle important dans le fonctionnement de la réserve. Elle détermine et régule le rythme de la réserve et fixe les régimes d'exploitation des usines de production et de retraitement. Plusieurs stratégies se présentent alors à l'entreprise. En période de forte pluie par exemple, la société des eaux adopte une série des mesures stratégiques

- d'ordre économique : en baissant le régime des machines dans le réseau d'épuration et en utilisant à plein régime les usines de production. Dans ce cas, le taux de production de l'eau est proche de 1 et la distribution se fait uniquement sur la base de l'offre extraite de la réserve. Cette démarche permet des économies en termes de coût de retraitement et le surplus d'eau produite est stocké en prévision des ruptures éventuelles.
- d'ordre logistique : en définissant les conditions de stockage du surplus des eaux de pluie et des eaux potables produites. Un investissement est donc nécessaire dans les infrastructures de stockage

- (citerne de stockage et barrage de retention) et dans l'interconnexion entre les réseaux d'adduction et le centre de stockage.
- d'ordre environnementale : la lutte contre le scénario extrême de type inondation ou pénurie chronique, en ré-alimentant les réserves non renouvelables.

La réserve est constituée de deux seuils : b_1 et de Q_{min}^r où b_1 est la barrière en dessous de laquelle le risque de rupture est prévisible. A cette barrière, la quantité d'eau disponible représente deux années de consommation. La quantité Q_{min}^r est le seuil critique qui annonce la rupture. Les deux seuils sont fixés de façon exogène. Une fois ce deuxième seuil atteint, l'entreprise enclenche la consommation de son stock et exerce en même temps l'option d'importer une quantité $b_1 - Q_{min}^r$.

– **L'offre.**

L'entreprise comme nous l'avons indiqué, a la possibilité de recourir à d'autres sources d'alimentation, ceci revient à reconnaître, implicitement, que son offre est sectionnée et donc composée des offres tirées des différentes alternatives. Dans l'élaboration du modèle, nous considérons deux types d'offre : la première, l'offre de base est directement tirée à la réserve. Pour maintenir la réserve à la fin de chaque période à son niveau Q_0^r , il faut nécessairement que cette offre soit à chaque instant égale à la quantité du remplissage A . La rupture est dès lors gérée en fonction de la demande d'eau. Si la demande est trop élevée et si l'entreprise ne fait pas appel à d'autres sources d'approvisionnement, la rupture devient inéluctable. Pour faire face à cette situation, l'entreprise recourt au retraitement des eaux usées, lequel constitue la seconde offre. L'offre globale s'écrit ainsi :

$$Q^o = q_1^o + q_2^o \quad (3.1)$$

où q_1^o est l'offre de base. Elle est aléatoire et dépend du taux de remplissage ; q_2^o est l'offre qui provient du retraitement des eaux usées. Nous supposons qu'elle est connue avec certitude et qu'elle est égale à : $q_2^o = f(Q_{t-1}^o)$ ⁶.

L'offre optimale Q^{0*} s'obtient par un calcul économique qui utilise la méthode de programmation dynamique. Il est possible de définir cette offre optimale à partir de méthodes analogues à celles de gestion de portefeuille. Dans cette configuration, le portefeuille serait constitué de deux actifs dont un risqué, (l'offre en provenance de la réserve) et un autre sans risque, (l'offre tirée du retraitement). L'offre sans risque représenterait à chaque instant par exemple, une quantité moyenne constante correspondant à un mois de consommation.

⁶ Q_{t-1}^o est l'offre de la période $t - 1$

– **Les interactions entre l’offre, la demande et le remplissage de la réserve**

L’interaction entre ces trois éléments peut conduire à différentes configurations en termes de politique de gestion. Deux scénari sont évoqués dans le cadre de notre analyse :

- (1) **Le premier scénario** : $A > Q^d$, $A > Q^o$ et $Q^d \leq Q^o$ presque sûrement

C’est le scénario⁷ idéal. Dans ce cas, le risque de rupture diminue et la maximisation de la dotation initiale Q_0^r devient le critère. L’objectif de l’entreprise dans cette situation est d’améliorer les services de production, d’étendre et de contrôler les réseaux d’adduction.

Le risque de rupture ne peut provenir dans ce cas que d’un aléa extérieur de type sécheresse qui perturberait la trajectoire de remplissage de la réserve.

- (2) **Le second scénario** : $A < Q^o$, $Q^d > Q^o$ et $Q^d > A$ presque sûrement

Dans cette configuration, l’offre optimale q_1^{*o} se fixe à un niveau inférieur ou égal à la quantité de remplissage, $q_1^{*o} \leq A$, pour maintenir l’équilibre de la réserve et éviter la défaillance du système. Concrètement, cette situation entraîne un déséquilibre entre l’offre et la demande ⁸ $Q^d > Q^o$ qui légitime assez clairement l’intérêt de recourir à l’offre q_2^o , voire l’offre⁹ q_3^o . Cette offre complémentaire q_2^o , compense partiellement ou totalement le déséquilibre $Q^d - Q^o > 0$. Si cette quantité ne comble pas totalement le déficit d’eau, c’est à dire $q_2^o < Q^d - Q^o$, l’entreprise recourt à d’autres solutions qui lui apportent une quantité q_3^o . Ce scénario devient catastrophique lorsque l’offre tirée de la réserve excède le taux de remplissage de la réserve avec une demande qui croît très rapidement. Dans ce cas, les séquences de rupture sont fréquentes et apparaissent très tôt. La gestion de la réserve devient difficile pour l’entreprise et les coûts liés à l’offre alternative augmentent très sensiblement.

– **La demande de l’eau.**

La demande d’eau potable est satisfaite par une offre globale Q^o . A l’équilibre, l’offre et la demande s’égalisent et la relation s’écrit

$$\forall t \rightarrow D_t = Q^o + \varepsilon \quad (3.2)$$

⁷ A est le taux de remplissage, Q^d représente la demande, Q^o est l’offre globale.

⁸ Q^d représente la demande, Q^o l’offre de l’eau et b_1 le seuil de rupture.

⁹ q_3^o provient soit du dessalement, soit de l’importation

où $Q^0 = q_{1t}^o + q_{2t}^o$ et ε peuvent prendre des valeurs positives ou négatives. La demande d'eau n'est pas fixe. Elle est croissante et fluctue de façon aléatoire à travers le temps. Elle suit la dynamique¹⁰ suivante :

$$dD = \alpha_D dt + \sigma_D dz \quad (3.3)$$

où $\alpha_D > 0$, dz est l'incrément d'un processus de Wiener.

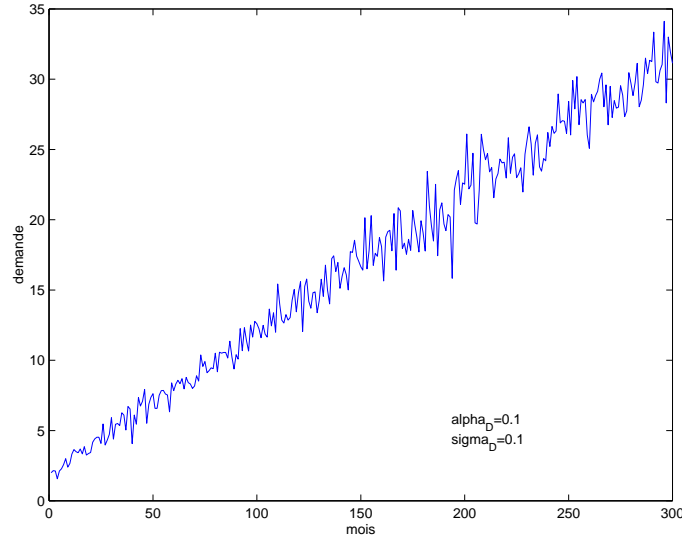


FIG. 6. Le processus de la demande 1

La seconde fonction de demande est périodique et est de la forme suivante

$$d[\ln D(t)] = k(\alpha(t) - D(t)) dt + \sigma_D dz_D \quad (3.4)$$

où dz_D est l'incrément du processus de Wiener, et σ_D est une constante positive. Le trend de la demande peut être représenté par la fonction

$$\alpha(t) = A_0 + B_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right) \quad (3.5)$$

La constante $\frac{2\pi}{12}$ établit la périodicité d'un cycle complet de la demande sur une année.

Quelles que soient les précautions ou la politique de gestion adoptée, il existe toujours un risque de rupture qu'il convient de réduire au maximum. Les conditions d'apparition des ruptures, les méthodes de gestion de ces ruptures, les règles d'exploitation d'une réserve sont propres à chaque réserve et à chaque région. Le modèle que nous proposons peut être modifié et adapté aux différentes configurations des ruptures. Notre démarche consiste à minimiser les coûts d'exploitation

¹⁰Nous proposons deux fonctions de demande dont une à périodicité.

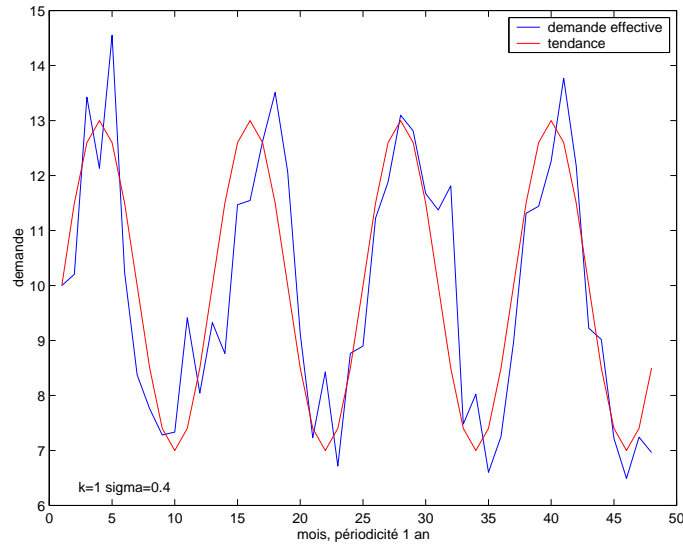


FIG. 7. La deuxième forme du processus de la demande

d'une réserve et en même temps à maximiser la quantité de la réserve à la fin de chaque période.

3.2. La minimisation des coûts d'exploitation et la maximisation du stock final espéré de la réserve en fin de période. La combinaison d'un processus de minimisation des coûts et d'une maximisation du stock final de la réserve d'eau est indispensable. Elle met en évidence les différentes configurations des ruptures et le comportement de l'offre et de la demande tout au long du processus. Elle offre des éléments quantitatifs qui sont les prémisses d'une politique optimale de gestion du système de production et de distribution d'eau. La politique d'exploitation que nous préconisons introduit une flexibilité dans le processus d'exploitation.

La quantité optimale d'eau en fin de chaque période assure l'équilibre de la réserve pour la période suivante. Un niveau très élevé du stock final correspond à une dotation initiale plus importante $Q^r \gg 0$ pour la période précédente $t + 1$. Une telle configuration sécurise et équilibre la réserve.

En réalité, il n'est pas toujours possible de maximiser cette quantité finale dans certaines régions. Il existe des états de la nature où la pénurie contraint à utiliser de façon intensive la dotation initiale au lieu de la maximiser. Dans une telle configuration, le fonctionnement de la réserve est irrégulier. Une réserve soumise aux conditions extrêmes d'utilisation, (forte pression hydrique), s'épuise progressivement avec une pénurie qui s'accroît. Elle se salinise et finit par se dessécher.

Suivant les zones géographiques, les conséquences peuvent être désastreuses pour l'économie et pour les autres réserves qui se salinisent également.¹¹

Nous formalisons ce double problème de minimisation des coûts et de maximisation du stock final dans un modèle sous forme d'optimisation dynamique. L'équation d'optimisation qui résume ce problème s'écrit

$$\min_{(Q_t^o)} E \left\{ \sum_{t=1}^T \rho^t [C_p(Q_t^o, t) + C_{tr}(Q_t^o, t) + C_r(Q_{t-1}^o, t)] - R[Q_T^r, T] \right\} \quad (3.6)$$

où C , C_t et R sont des fonctions continues et convexes. $Q_t^r > 0$; $Q_0^r > 0$. ρ est le taux d'actualisation (et se trouve dans l'intervalle $0 < \rho < 1$). E est l'espérance mathématique sous la probabilité adaptée au risque).

L'équation de stockage d'eau est représentée par

$$Q_t^r = Q_{t-1}^r + \tilde{A}_t - Q_t^o \quad (3.7)$$

où Q_{t-1}^r est le contenu de la réserve à l'instant $t - 1$, Q_t^o est l'offre en t . Cette offre provient à la fois de la réserve et du réseau de retraitement. A_t est la quantité d'eau de pluie qui alimente notre réserve. A_t suit l'équation

$$A_t = \left[\tilde{P}_t - \left(\tilde{E}_{v,t} + \tilde{I}_t \right) \right] \quad (3.8)$$

En tenant compte de la saisonnalité climatique, nous avons des périodes de forte pluie, de faible pluie ou, parfois, des périodes de sécheresse. Cette observation affecte directement le comportement et la dynamique du taux de remplissage¹². En effet, ce taux ne suit pas

¹¹Il existe, dans le monde, des réserves d'eau qui sont renouvelables et d'autres qui ne le sont pas. Pendant la période de sécheresse, la pression hydrique déjà très remarquable dans certaines régions double, voire triple d'intensité. Ce phénomène s'accompagne de nombreux inconvénients : épuisement temporaire ou définitif des réserves, salinisation des nappes phréatiques, eaux saumâtres, etc. Pour les réserves renouvelables, une stratégie alternative consiste à arrêter temporairement ou réduire le rythme d'exploitation en période de forte tension hydrique en espérant retrouver un niveau acceptable. Une autre alternative serait de ré-alimenter les réserves artificiellement en utilisant les technologies nouvelles destinées à cette pratique. Ces deux alternatives constituent une option réelle que nous ne valoriserons pas cette section. En présence des réserves non renouvelables, la meilleure stratégie serait de proposer une option de recherche permanente des réserves nouvelles. D'autres alternatives sont envisageables : l'importation d'eau des régions riches, le dessalement des eaux de mer et des eaux saumâtres. Ces deux alternatives sont encore très coûteuses.

¹²Les quantités P_t , E_t , I_t sont supposées être dirigées par des mouvements Browniens géométriques. $\frac{dP}{P} = \mu_1 dt + \sigma_1 dz_1$, $\frac{dE}{E} = \mu_2 dt + \sigma_2 dz_2$, $\frac{dI}{I} = \mu_3 dt + \sigma_3 dz_3$.

un simple processus de Wiener. Il suit plutôt une dynamique caractérisée par un processus stochastique "hydrométéorologique"¹³ de type Ornstein-Uhlenbeck avec un retour à la moyenne à la fin de chaque cycle.

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= A_t + \kappa(\alpha - A_t) + \sigma\varepsilon_t \\ \alpha &= \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa} \end{aligned} \quad (3.9)$$

où $\kappa > 0$ mesure la force de retour à la moyenne. σ est le paramètre de la volatilité. α est le taux moyen de remplissage. ε_t suit une distribution normale $\mathcal{N}(0, t)$.

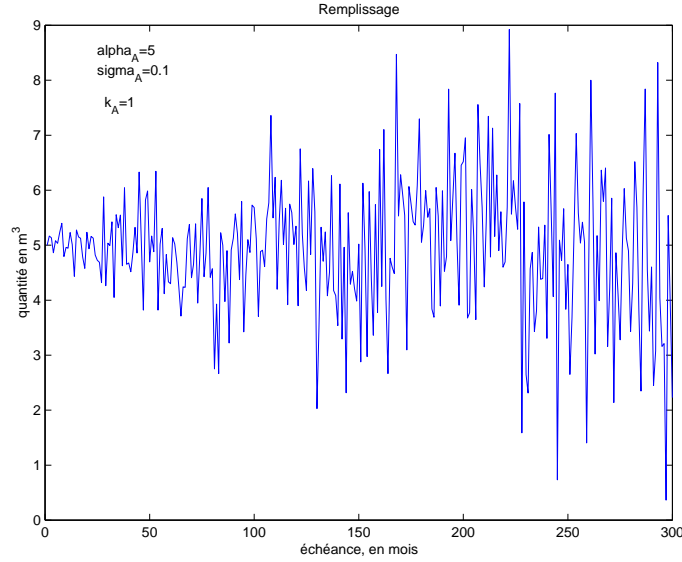


FIG. 8. Le processus de remplissage de la réserve

L'équation de stockage d'eau est représentée par

$$Q_{t+1}^r = Q_t^r + A_{t+1}^{\sim} - Q_{t+1}^o \quad (3.10)$$

En remplaçant A_{t+1} par sa valeur nous obtenons

$$Q_{t+1}^r = Q_t^r + A_t + \kappa(\alpha - A_t) + \sigma_t\varepsilon_t - Q_{t+1}^o \quad (3.11)$$

L'offre de l'eau ne peut pas dépasser une certaine quantité Q^s . Cette quantité d'offre seuil est subordonnée à la capacité de la réserve. Dans ce modèle A_t et D_t sont des variables exogènes.

– Les contraintes

¹³Un processus stochastique hydrométéorologique est un processus, à deux dimensions, l'espace et le temps, caractérisé par une variable aléatoire hydrométéorologique, exemple : la pluie mesurée $P(x, t_i)$ à l'instant t_i , J. Miquel (2001)

Nous avons dans ce modèle deux contraintes. En effet nous considérons dans un premier temps que l'offre courante ne peut pas dépasser une offre maximale notée Q^s .

$$Q_t^o \leq Q^s \quad (3.12)$$

La seconde contrainte exprime que la demande de l'eau sera toujours inférieure à l'offre. Cette contrainte s'écrit

$$\forall t \in [0, T] \quad Q_t^o \geq D_t \quad (3.13)$$

Notons que cette contrainte est forte car elle considère implicitement que le seul risque de rupture d'eau provient uniquement du côté du remplissage de la réserve. En réalité, toutes choses égales par ailleurs, une forte hausse de demande d'eau sur une période très longue peut engendrer le déséquilibre d'une réserve. La pénurie d'une réserve intervient à un instant noté τ . Cet instant (qui au sens probabiliste est un temps d'arrêt) est défini par

$$\begin{cases} \tau = \inf\{t \geq 0 \mid Q_t^r < f(Q_{min}^r, b_1)\} \\ \tau = \infty \text{ sinon} \end{cases} \quad (3.14)$$

Par construction, un temps d'arrêt est aléatoire. Il est pertinent d'analyser le concept du moment optimal de l'arrêt τ pour pouvoir définir la stratégie adaptée. Si τ est antérieur à l'échéance T du projet, la quantité Q^r d'eau de la réserve atteint la valeur seuil Q_{min}^r ; l'entreprise exerce son option d'importer et la valeur de l'option s'écrit

$$g(Q_{min}^r, b_1) = \max[(b_1 - Q_{min}^r)P - E, 0] \quad (3.15)$$

où E est le prix d'exercice et $V_{imp} = (b_1 - Q_{min}^r)P$ la valeur de l'eau importée.

Nous cherchons donc à résoudre un problème de minimisation des coûts d'extraction tout en maximisant la quantité Q^r de la réserve, sous certaines contraintes. Le problème de mini-maximisation s'écrit

$$\begin{cases} \min_{(Q_t^o)} E \left\{ \sum_{t=1}^T \rho^t [C_p(Q_t^o, t) + C_{tr}(Q_t^o, t) + C_r(Q_{t-1}^o, t)] - R[Q_T^r, T] \right\} \\ \text{sous contrainte} \\ \forall t \quad D_t \leq Q_t^o \leq Q^s \end{cases} \quad (3.16)$$

Pour simplifier l'expression d'optimalité, nous transformons la série des

coûts en un seul coût global

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T \rho^t [C_p(Q_t^o, t) + C_{tr}(Q_t^o, t) + C_r(Q_{t-1}^o, t)] \\ &= \sum_{t=1}^T \rho^t (C_p(Q_t^o, t) + C_{tr}(Q_t^o, t)) + \sum_{t=0}^{T-1} \rho^{t+1} C_r(Q_t^o, t+1) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nous pouvons donc l'écrire

$$\sum_{t=1}^T \rho^t C(Q_t^o, t). \quad (3.18)$$

Avec

$$C(Q_t^o, t) = C_p(Q_t^o, t) + C_{tr}(Q_t^o, t) + \rho C_r(Q_t^o, t+1) \quad (3.19)$$

on remarque que si C_p , C_{tr} et C_r sont convexes alors C sera aussi convexe (combinaison à coefficients positifs de fonctions convexes). nous pouvons alors considérer $C(Q_t^o, t)$ comme le coût total à l'instant t . Ce coût global est noté $\sum_{t=1}^T C(Q_t^o, t)$. Pour résoudre notre problème, il nous faut définir la fonction R . R est une fonction croissante de Q^r , positive et convexe. Nous la choisissons de la forme $R(Q_t^r) = \lambda Q_t^r$. Le coefficient λ permet de faire jouer un rôle à la quantité de la réserve à maximiser. Plus λ est fort et plus la contribution de $R(Q_t^r)$ dans le problème de maximisation est forte.

– La méthode de minimisation de UZAWA

Dans cette méthode, le problème de la minimisation sous contraintes se présente de la manière suivante

- (1) les contraintes se présentent sous la forme $\varphi_i(u) \leq 0$ pour $i \in \{1, 2, \dots, m\}$
- (2) le problème revient à rechercher $u \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} u \in \mathcal{U} = \{v \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \varphi_i(v) \leq 0 \ \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}\}, \\ J(u) = \inf_{\{v \in \mathcal{U}\}} J(v) \end{cases} \quad (3.20)$$

Nous supposons J convexe.

- (3) la méthode de résolution consiste à calculer u^k solution de :

$$J(u^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \varphi_i(u^k) = \inf_{v \in \mathbb{R}^n} \left\{ J(v) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \varphi_i(v) \right\} \quad (3.21)$$

puis

$$\lambda_i^{k+1} = \max \{0, \lambda_i^k + \rho \varphi_i(u^k)\} \ \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

ρ étant une constante, assez petite, fixée dans le problème.

Dans notre cas $u = (Q_1^0, \dots, Q_T^0) \in \mathbb{R}^T$. Les contraintes sont

$$\begin{cases} \varphi_{t,1}(u) = Q_t^0 - Q^s, \varphi_{t,2}(u) = D_t - Q_t^0 \\ J(u) = E \left\{ \sum_{t=0}^T \wedge^{\tau} \rho^t C(Q_t^0) - \lambda (Q_T^r 1_{\tau > T} + 1_{\tau \leq T} P_{\tau}^e \times g(Q_{min}^r, b_1)) \right\} \end{cases} \quad (3.22)$$

Où $f(Q_{min}^r, b_1) = Q_{min}^r$, et P_τ^e est le prix de l'eau à importer. A_T et P_τ^e , sont des grandeurs aléatoires.

3.3. Résultat de l'étude. Dans cette analyse, la politique de gestion est déterminée par le facteur λ . Suivant son niveau, nous avons remarqué trois types de politique possible

- (1) pour un λ faible (proche de zéro), l'entreprise privilégie la seule politique de minimisation de coûts d'exploitation. Elle ne se préoccupe pas de la maximisation de la réserve.
- (2) pour λ compris entre 0 et 10, l'entreprise a la possibilité de combiner les deux politiques.
- (3) pour un λ grand ($\lambda = 10$), l'entreprise oriente ses efforts vers la maximisation de la réserve et ne se préoccupe pas de la minimisation des coûts.

– **Le lambda proche de zéro : la minimisation de coûts**

Avec un λ proche de zéro, l'entreprise opte pour la politique unique de minimisation des coûts d'exploitation. A partir de la méthode d'optimisation, elle se fixe un coût minimum. Ce coût peut être considéré comme un coût seuil. A ce coût correspond une quantité minimum de production.

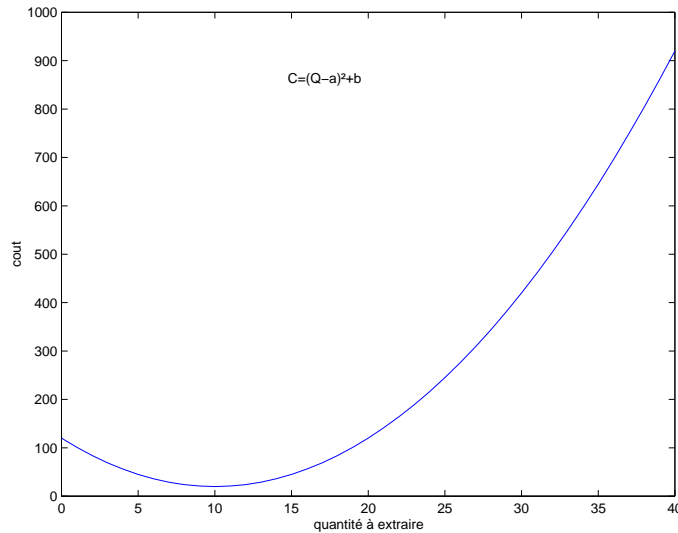


FIG. 9. La courbe de coût.

Suivant que le niveau de la demande est inférieur ou supérieur à l'offre correspondant au coût minimum, Q_{min}^0 , l'entreprise définit deux stratégies. Dans l'optique d'une demande d'eau inférieure à Q_{min}^0 , il est optimal pour cette dernière de produire au coût minimum. Cette

configuration semble entraîner une situation de gaspillage d'eau, d'autant plus que dans cette zone, l'entreprise produit plus que la demande effective. Pour optimiser cette politique, il convient de stocker l'eau. Ce stockage sera bénéfique en période de rupture. La quantité d'eau stockée nous apporte une satisfaction nette des coûts de stockage et évoque la notion *de convenience yield*. La seconde configuration est celle où la

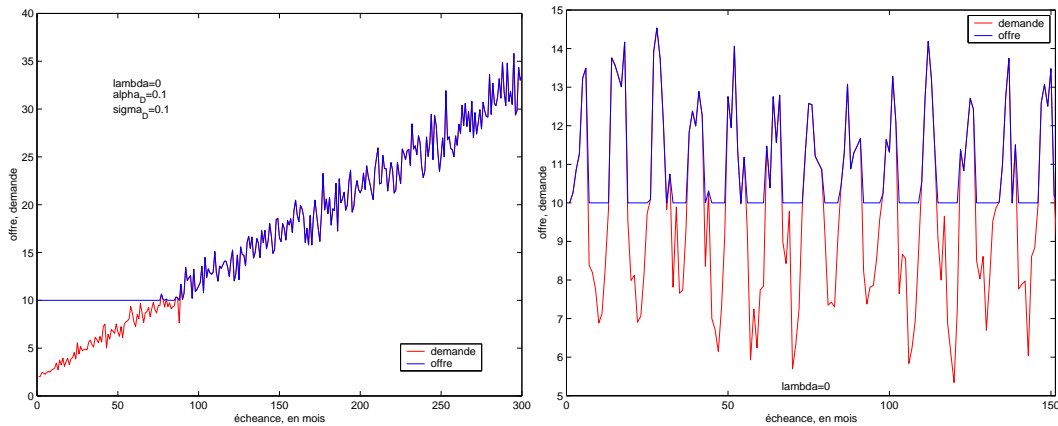


FIG. 10. Offre/Demande.
Le modèle de demande 1 et 2. $\lambda = 0$.

quantité de la demande effective excède celle de l'offre du coût minimum. La politique optimale exige à l'entreprise de produire et d'offrir la demande. Dans cette zone, les courbes d'offre et de demande coïncident. Cette nouvelle politique d'offre a une répercussion immédiate sur la politique de stockage. L'entreprise ne stocke quasiment plus dans cette zone car elle produit le juste nécessaire. Les deux politiques se traduisent dans la représentation graphique de deux versions du modèle de demande.

– **Le lambda proche de zéro et la gestion de rupture.**

La politique de minimisation des coûts entraîne une apparition rapide et plus fréquente des ruptures. En analysant ce problème de gestion de rupture par rapport aux deux modèles de demande, nous remarquons que dans le modèle de demande cyclique, la fréquence des ruptures est moins importante que dans le modèle de demande croissante. Ceci s'explique par le fait que le premier modèle prend en compte les effets de saisonnalité. Il existe en effet des périodes de l'année où la demande d'eau est faible et d'autres périodes où elle est forte. La compensation entre les hausses et les baisses de la demande en adéquation avec le remplissage de la réserve réduit les fréquence des ruptures pour ce modèle. Dans la perspective de la politique de minimisation, les coûts liés à l'importation augmentent globalement plus vite avec le temps mais relativement moins vite dans le cas du modèle cyclique.

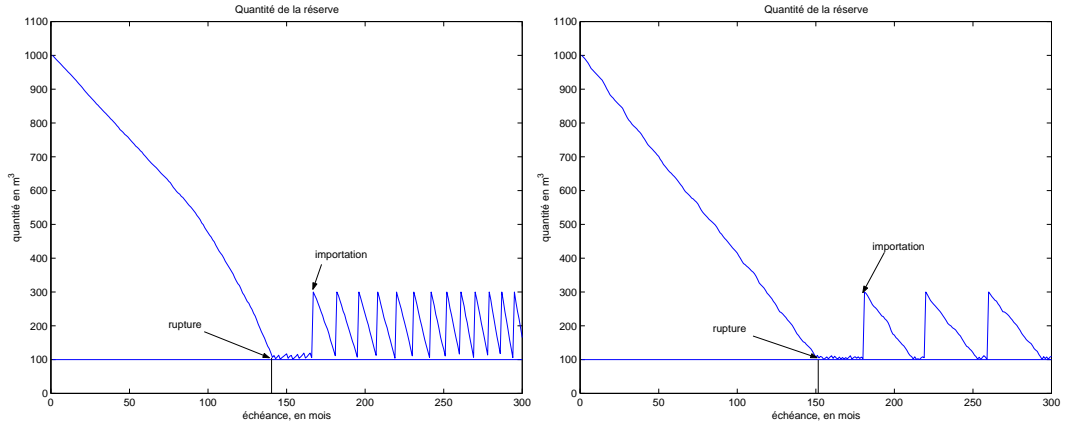


FIG. 11. La réserve et les ruptures.
Le modèle de demande 1 et 2 ; $Q_{min}^r = 100$; $\lambda = 0$.

Quand la quantité de la réserve, Q^r , se rapproche ou atteint le seuil critique Q_{min}^r ¹⁴, l'entreprise décide d'utiliser son stock et exerce en même temps son option d'importer l'eau. Elle peut également introduire une flexibilité en interchangeant par exemple les diverses alternatives en fonction des coûts de chacune : le dessalement ou le traitement. La combinaison des différentes alternatives peut être une solution optimale.

- $\lambda = 5$: **Combinaison de la politique de minimisation et de maximisation de la réserve.**

L'entreprise combine les deux politiques. Son objectif est de mettre en place une combinaison optimale qui donne un coût minimum capable de fournir un intervalle des prix acceptables en garantissant une distribution continue.

Les courbes d'offre et de demande se comportent presque de la même façon que dans le cas précédent, sauf que la zone où il est optimal de produire au coût minimum se réduit. La quantité Q_{min}^0 se réduit également avec la prise en compte de la politique de maximisation de la réserve. En d'autres termes, en maximisant la réserve, l'entreprise privilégie de plus en plus la production utile. En appliquant une telle politique et surtout si l'entreprise atteint un point d'équilibre où le coût minimum implique une offre qui égale la demande, elle peut espérer proposer dans ce cas, un prix de vente d'eau qui soit acceptable par la majorité des agents économiques.

- $\lambda = 5$ et la **gestion de rupture**

¹⁴ Q_{min}^r correspond à un an de consommation. La somme de la quantité Q_{min}^r et du stockage assure la distribution d'eau en attendant la livraison de l'importation.

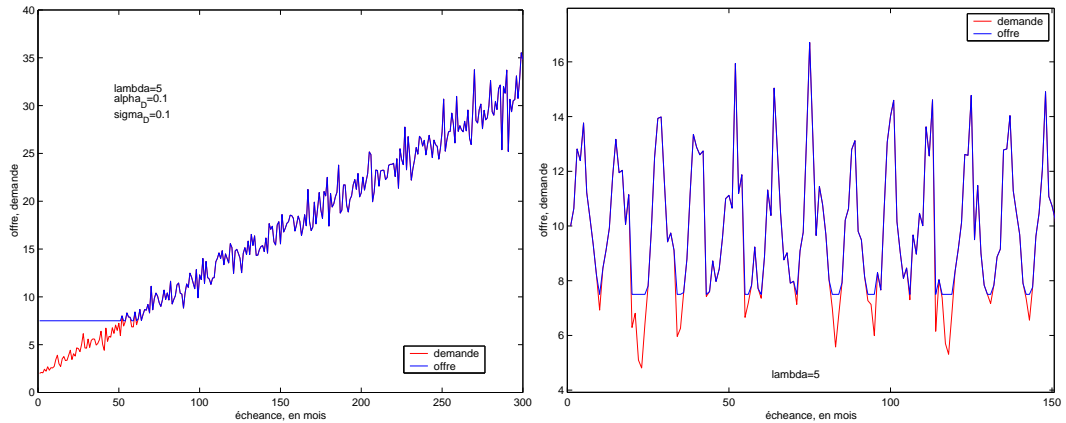


FIG. 12. Offre/Demande.
Le modèle de demande 1 et 2 ; $\lambda = 5$.

La prise en compte de la combinaison (maximisation/minimisation) a un effet bénéfique à la fois sur la date d'apparition de la première rupture et sur les coûts. Avec la maximisation de la réserve, la première rupture apparaît un peu plus tardivement par rapport au cas précédent.

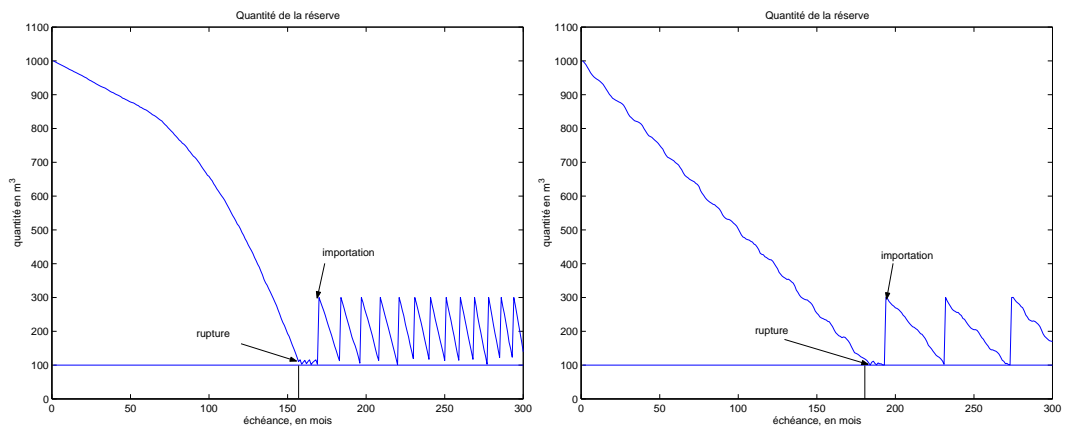


FIG. 13. La réserve et les ruptures.
modèle de demande 1 et 2 ; $Q_{min}r = 100$; $\lambda = 5$.

Ce rallongement de la durée d'exploitation n'a pas un effet négatif sur les coûts d'exploitation car toutes choses égales par ailleurs, le niveau du coût minimum reste identique. Par contre, le niveau des coûts d'exploitation sera relativement plus important que les coûts du recours aux autres alternatives. En entre les deux modèles de demande, le modèle cyclique est meilleur que le modèle croissant régulièrement. La première rupture apparaît plus tard dans le modèle cyclique que dans le modèle croissant.

– $\lambda = 10$: totale maximisation de la réserve.

Cette politique confirme les tendances de la politique intermédiaire. La zone où $D < Q^0$ se réduit encore davantage. L'entreprise est de plus en plus stimulée à uniquement satisfaire la demande. La production se résout à la quantité utile et le stockage d'eau est inexistant bien qu'ayant des effets de plus en plus positifs en termes de gestion des ruptures : la maximisation qui ne tient pas compte de la minimisation des coûts a des effets pervers sur la politique de prix.

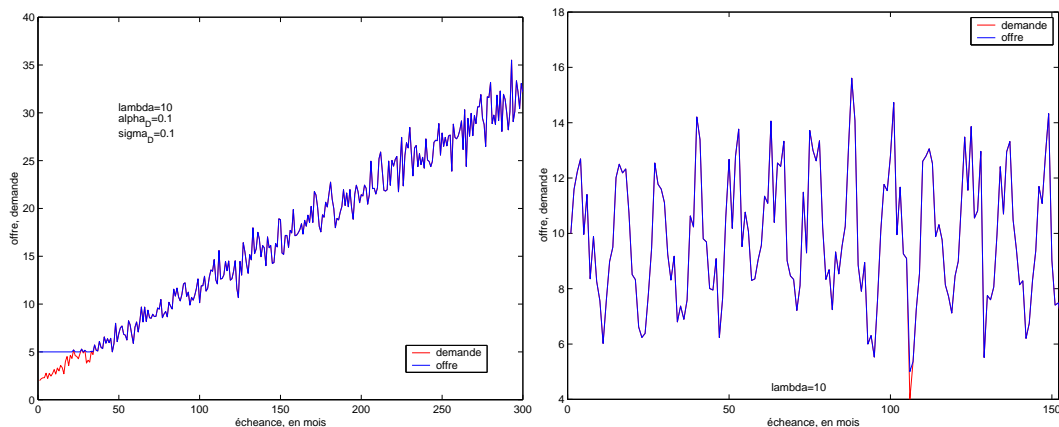


FIG. 14. Offre/Demande.
Le modèle de demande 1 et 2. $\lambda = 10$.

Dans la configuration d'un lambda égal à 10, la première rupture apparaît¹⁵plus tard que dans le configuration intermédiaire. Elle apparaît nettement plus tard avec une fonction de demande cyclique. Comme nous le verrons dans la suite de notre analyse, pour un niveau de lambda de 10, le système se stabilise et les séquences de réalisation des ruptures a priori sont moins fréquentes que dans les deux cas précédents. Pour espérer retarder davantage les ruptures, les deux catégories de solutions sont d'une part, l'utilisation des alternatives ou leur combinaison et d'autre part, agrandir la réserve en recherchant par exploration d'autres réserves dans une zone voisine par exemple.

Dans cette logique, les coûts d'exploitation sont globalement très élevés comparés à ces deux alternatives.

Nous remarquons que pour un certain niveau de lambda, le processus d'apparition de rupture se stabilise et tend vers un certain équilibre. La figure (3.3) illustre cette observation. Pour une valeur de λ supérieure ou égale à 14, la première rupture reste figé au 175 ème mois.

¹⁵La première rupture apparaît aux environs du 175 ème mois alors que dans la première configuration, c'est environ au 147 ème mois qu'est apparue la première rupture.

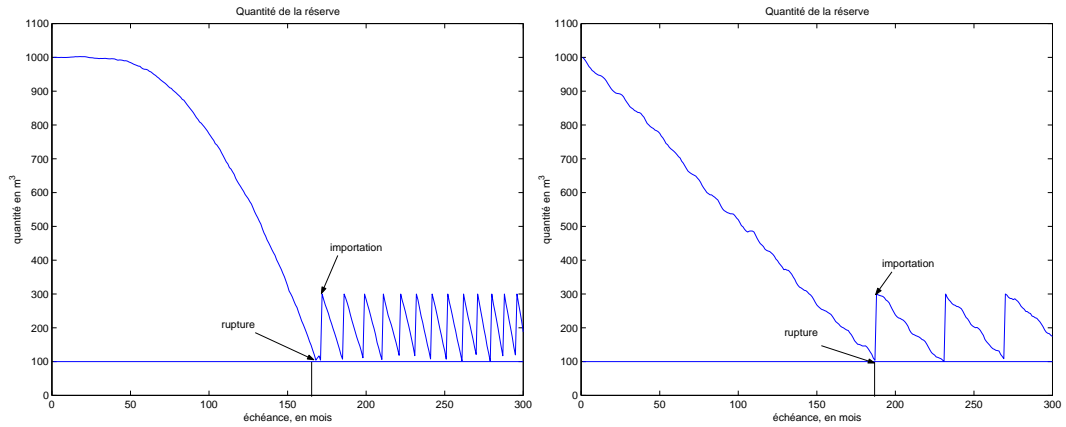


FIG. 15. La réserve et les ruptures.
Le modèle de demande 1 et 2 pour $\lambda = 10$.

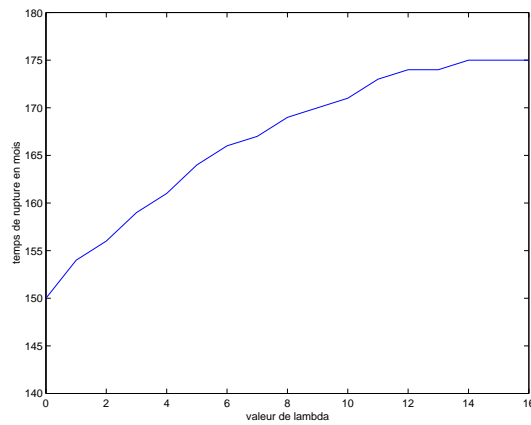


FIG. 16. Les instants de rupture en fonction de λ .

– **La gestion de stock d'eau.**

La politique de stockage est fonction de la politique de gestion des réserves employée par l'entreprise. Lorsqu'elle opte pour une politique de minimisation des coûts d'exploitation et que la demande est inférieure à la quantité correspondant au coût minimum, la quantité destinée au stockage est très importante. Ceci se voit sur la courbe continue dans le graphique (17) ci dessous.

Le stockage des surplus d'eau en période d'abondance ou dans la perspective d'une politique de minimisation des coûts constitue une option valable et quantifiable au problème de rupture de l'eau. Le graphe (17) nous montre par ailleurs que dès lors que l'entreprise décide de maximiser la réserve, la part de l'eau destinée au stockage diminue progressivement et disparaît lorsque l'offre égale la demande effective.

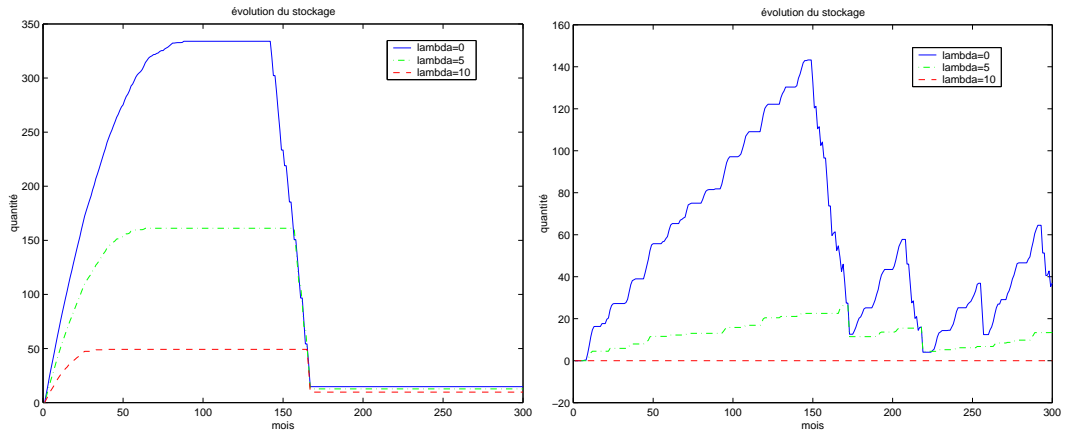


FIG. 17. L'évolution du stockage.
Le modèle de demande 1 et 2. $\lambda = 0$, $\lambda = 5$ et $\lambda = 10$

la valeur du stock d'eau est connu à chaque instant car elle est fonction du prix et des quantités recueillies.

– **Interaction entre la réserve et le stockage**

L'utilisation du stock intervient lorsque la quantité de la réserve atteint le seuil minimum Q_{min}^r . A cet instant, l'entreprise suspend le pompage dans la réserve et la valeur du stock converge vers zéro. La réserve se réapprovisionne progressivement et naturellement des eaux de pluie. Le remplissage de la réserve peut la rétablir et atteindre un niveau suffisant pour satisfaire la demande et différer l'importation. Dans ce cas et sous certaines conditions, le stock peut se revaloriser.

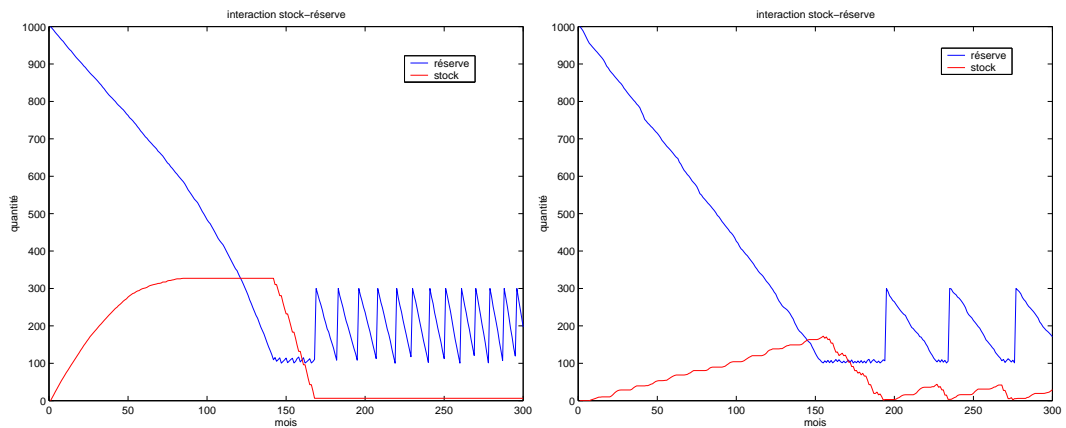


FIG. 18. Les interaction réserve/stockage.
pour les modèles de demande 1 et 2. ($\lambda = 0$).

Si la réserve ne se régénère pas vite, le stock s'épuise et sa valeur devient nulle, l'entreprise peut par exemple exercer son option d'importer

l'eau. La date de cet exercice doit tenir compte du rythme d'épuisement du stock d'eau et du temps nécessaire à la livraison dans le but d'assurer la distribution dans les temps et éviter la rupture.

Le stockage physique d'eau joue un rôle important dans la stabilisation du système de production locale de l'eau. Il permet de compenser sans délai toute augmentation de la demande. Dans la perspective d'une importation, ce stock couvre la demande jusqu'à réception de la quantité $d_1 - Q_{min}^r$. Son rôle ne s'arrête pas qu'à ces deux éléments car il permet également de stabiliser et maintenir le prix à un niveau accessible à tous. Compte tenu de tous ces éléments, le stockage de l'eau pourra devenir une solution réaliste, notamment lorsque le prix de l'eau aura atteint un certain seuil.

Le niveau du stock doit être au moins égal à la demande pendant le délai d'obtention de l'eau pour éviter la rupture. L'intégration dans notre analyse du délai de livraison ou délai d'obtention complique la question du moment de l'exercice éventuel de l'option car suivant la durée de temps de réception (courte ou longue), l'exercice de l'option peut se faire soit avant la rupture, soit après celle-ci.

La quantité d'eau importée doit tenir compte de la capacité du système de stockage, de la possibilité ou non de ré-activation et d'exploitation de la réserve pendant et après la période de pénurie, de la prévision de l'évolution de la demande et de la capacité technologie du système de stockage, (pompage, pression, connexion avec les réseaux d'adduction etc).

– **La relation profit de l'entreprise, λ , coût de production et prix de l'eau**

Une relation existe entre le profit de l'entreprise, la politique optimale engagée, le niveau de λ , les coûts de production et le prix de vente de l'eau. En effet, toute augmentation du niveau de λ évoque la volonté de l'entreprise à privilégier davantage la politique de maximisation de la réserve. La conséquence d'une telle stratégie se traduit dans :

- (1) un allongement du moment optimal, τ , de rupture,
- (2) une hausse des coûts de production d'eau,
- (3) une hausse de prix¹⁶ de l'eau et une baisse tendancielle du profit.

¹⁶Depuis 1991, en France, le prix total de 120 m^3 livré en un an à un consommateur a augmenté en moyenne de +9% par an. Dans une métropole aussi bien fournie en infrastructure, où le réseau de base est totalement amorti et où une partie de l'eau provient des siècles de captage lointain, le prix moyen a doublé à Paris sur cette même période. L'augmentation des dépenses est principalement attribuée à l'assainissement dont la charge a augmenté de 15% par an au niveau des ménages. La part de l'investissement dans ces coûts est maintenant de plus du tiers du total.

Les prix de l'eau sont contrôlés et ne peuvent pas éternellement augmenter à cause du caractère vital de cette ressource. De ce fait, il apparaît à priori logique que toute augmentation de λ induit une hausse des coûts et de surcroît ait un impact négatif sur le profit de l'entreprise. Cette dernière est dès lors confrontée à un risque supplémentaire à gérer, en plus de celui de la rupture de l'eau, il s'agit du risque de baisse tendancielle de profit. Pour mieux gérer ce risque et parvenir à son objectif initiale de maximisation de la valeur, elle doit déterminer un niveau de λ optimal qui prend à la fois en compte la politique de minimisation des coûts et celle de maximisation de la réserve.

– **La détermination d'un lambda optimal**

La méthode que nous utilisons pour définir le lambda optimal est une méthode intuitive. Nous observons tous les points de rupture sur la durée de vie du projet. Nous établissons ensuite un rapport

$$\lambda^* = \frac{d_i}{\bar{d}_{i-1}} \quad (3.23)$$

où \bar{d}_{i-1} est le premier point de rupture observé; d_i représente les différents autres points de rupture sur la durée de vie du projet. Le lambda optimal correspond sur la représentation graphique au premier point qui indique le début du fléchissement de la courbe (lambda/coût). En ce point le profit de l'entreprise est maximal. En résumé, le lambda optimal est celui qui permet à l'entreprise d'appliquer la politique de minimisation des coûts, celle de maximisation de la réserve et du profit. En fonction des paramètres de notre modèle, le lambda optimal prend la valeur huit.

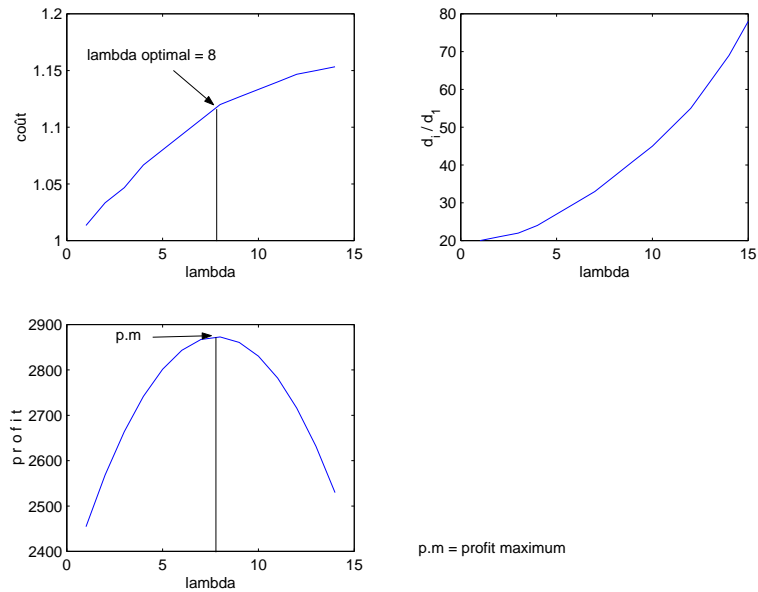


FIG. 19. La relation entre le lambda et les paramètres du modèle.

Une autre piste, aussi viable pour le maintien ou l'amélioration du profit de l'entreprise, serait de proposer des prix progressifs en fonction des consommateurs, (ménages, industriels, ou agriculteurs) et de la quantité de l'eau consommée. Un tel système serait avantageux à la fois pour l'entreprise, qui voit s'agrandir la possibilité d'intégrer les divers coûts de production dans le prix, et pour les consommateurs qui trouve un prix adapté en fonction de la situation de chacun, ce qui permet un accès pour tous à l'eau.

Malgré la volonté de fixer un niveau optimal de lambda, le risque de rupture ne s'efface pas complètement mais reste éventuel. Ceci est vrai dans les régions de la surexploitation des nappes phréatiques. La surexploitation et/ou la contamination, (pollution des cours d'eau), des ressources naturelles d'eau a pour conséquence l'augmentation des coûts de traitement. Le niveau élevé de ces coûts incitent les autorités et l'entreprise à appliquer les principes de pollueur payeur. Ce principe contribue au maintien du profit de l'entreprise et à la stabilisation des prix de l'eau. En résumé pour maintenir son profit, l'entreprise est obligée de transférer le risque de baisse de profit aux consommateurs à travers la prise en charge de différentielle de divers coûts de production d'eau. Cette politique trouve ses limites dans une économie où le prix de l'eau est très contrôlé.

Bien que contrôlé, le prix de production du m^3 d'eau est désormais très élevé. Ce niveau élevé s'explique car il s'ajoute aux coûts initiaux de production¹⁷ les coûts de transport, les coûts de stockage, de distribution et d'autres coûts nécessaires pour disposer d'un débit satisfaisant pour approvisionner l'usine en matière première. Pour réduire le prix du m^3 et le maintenir à un niveau raisonnable, il faut davantage minimiser ces coûts supplémentaires, disposer d'une technologie ou d'une flexibilité qui favorise le choix d'échanger un risque contre un autre.

La dégradation de la situation mondiale de l'eau et les enjeux autour de cette commodité nous interpellent et nous poussent à nous demander si demain nous n'aurions pas un prix mondial de l'eau qui refléterait sa vraie valeur en tant que bien économique rare au même titre qu'il existe un cours du pétrole. Cette question trouve toute son importance dans la perspective de notre deuxième exemple d'application des options réelles car l'importation de l'eau risque de devenir une alternative valable à la question de la pénurie d'eau potable. Dans ce contexte, la question d'un marché boursier structuré de l'eau se posera avec acuité et les enjeux sur les prix de la ressource dépasseront le simple cadre national. La création d'un tel marché est viable pour permettre aux investisseurs et gestionnaires de se couvrir contre les différents risques en les transférant aux acteurs spécialisés dans la gestion de ces derniers. La définition d'un prix mondiale aura l'avantage de favoriser les échanges entre les régions en déficit et celles qui regorgent d'eau et de permettre la négociabilité de façon continue de cette commodité, ce qui est une des hypothèses pour la valorisation rationnelle d'un actif. ces échanges favoriseront de surcroît une répartition équitable d'eau.

4. CONCLUSION

Le modèle développé dans cet article et les résultats présentés montrent que le risque de rupture d'une réserve peut se gérer. Cette gestion n'implique pas sa disparition totale car les aléas climatiques peuvent toujours précipiter une rupture même dans les régions non exposées. De ce fait, un contrôle et une suivie régulier de ce risque sont nécessaires afin de proposer des solutions valables et durables. Dans le cadre de nos études à venir, nous proposerons des solutions de couverture du risque de rupture d'une réserve d'eau potable. Ces solutions seront quantifiables à partir de la méthodologie d'options réelles.

¹⁷les coûts de pompage, de traitement et de retraitement avant rejet ou réutilisation, assainissement.

– **Les symboles**

- Q^r = la quantité d'eau des réserves développées ou non développées.
- (Q_1^r, Q_2^r, Q_3^r) = les quantités respectives observables à l'échéance de la prospection en t_1 ,
- Q_0^r = la dotation initiale de la réserve,
- Q^o = l'offre de l'eau,
- q_1^o = l'offre en provenance de la réserve,
- q_2^o = l'offre liée au retraitement des eaux usées,
- Q_{t-1}^o = l'offre de la période précédente,
- Q^s = l'offre maximale de l'entreprise,
- Q^{o*} = l'offre optimale,
- Q^d = la demande de l'eau,
- Q_{min}^r = le second seuil. C'est un seuil critique correspondant à un an de consommation,
- b_1 = le seuil d'alerte, il correspond à deux ans de consommation,
- $b_1 - Q_{min}^r$ = la quantité de sécurité,
- P est le prix courant de l'eau,
- V_n = la valeur de la réserve en fonction de la quantité observée,
- I_1 = les dépenses d'investissement liées à la phase d'exploration,
- I_2 = les dépenses d'investissement amputable à la phase de développement et construction d'infrastructure,
- I_1^* = le niveau des dépenses investissement au dessus desquelles l'entreprise renonce à l'exploration,
- PV_t = la valeur actuelle correspondant aux rendement les à l'exploitation du projet,
- v_i = la valeur des options implicites du projet,
- r = le taux d'intérêt sans risque,
- \tilde{A} = le taux de remplissage de la réserve,
- \tilde{E}_t = la quantité d'eau de pluie perdue par évaporation,
- \tilde{I}_t = l'infiltration des eaux de pluie destinées à d'autres réserves,
- \tilde{P}_t = les quantités d'eau de pluie observables à l'instant t ,
- C_p = les coûts de pompage,
- C_{tr} = les coûts de traitement de l'eau brute,
- C_r = les coûts de retraitement des eaux usées,
- R = la fonction croissante de Q^r , positive et convexe,
- σ = la volatilité,
- ρ = le taux d'actualisation,
- κ = la force de rappel,
- τ = le temps d'arrêt,
- K = le prix d'exercice,
- P_τ^e = le prix courant de l'eau à importer,
- λ = le coefficient permettant de faire jouer un rôle modulé à la quantité de la réserve à maximiser.

RÉFÉRENCES

- [1] CVITANIC J. ET KARATZAS I. “Hedging Contingent Claims with Constrained Portfolios”. *Annals of Applied probability*, (3) :pp. 652–681, 1993.
- [2] FITZPATRICK B. ET FLEMING W. ”Numerical Methods for Optimization Investment/Consumption Model”. *Mathematics of Operation Research*, (16) :pp. 822–841, 1991.
- [3] FLEMING W. ET ZARIPHOPULOU T. “An Optimal Investment Consumption Problem with Borrowing”. *Mathematic of Operations Research*, (16) :pp. 802–822, 1991.
- [4] HLOUSKOVA J., JECKLE M., KOSSMEIER S., OBERSTEINER M., SCHNABL A. “Real Option Models and Electricity Portfolio”. *Institute for Advanced Studies, Vienna*, july 2001.
- [5] JEANBLANC PIQUET M. ET POITIER. “Optimal Portfolio for a Small Investor in a Market Model with Discontinuous Prices”. *Applied Mathematic Optimization*, (22) :pp. 287–310, 1990.
- [6] KARATZAS I., LEHOCZKY J.P. ET SHREVE S. “Optimal Portfolio and Consumption Decision for a ”Small Investor”On a Finite Horizon”. *SIAM Journal Control and Optimization*, pages pp. 1557–1587, 1987.
- [7] KASSAR I., LASSERRE P. “Species Preservation and Biodiversity Value : A Real Option Approach”. *Centre Interuniversitaire de Recherche en analyse des Organisations, (CIRANO), Montréal*, pages pp. 1–26, Septembre 2002.
- [8] MIQUEL J. “Hydrologie Statistique : Introduction à l’Etude des Processus Hdrométéorologiques.
- [9] ROUSSEL PIERRE. “Dossier l’eau : Politique de l’Eau”. *Revue des Ingenieurs*, (386) :pp. 13–16, juin 2000.
- [10] SHREVE S. ET SONER M. “Optimal Investissment and Consumption with Two Bonds and Costs”. *Mathematical Finance*, 1 :pp. 53–87, 1991.
- [11] SHREVE, S. ET XU, G. “A Duality Method for Optimal Consumption end Investment under Short-Selling Prohibition. I.General Market Coefficients ”. *Annals of Probability*, (2) :pp. 87–112, 1992a.
- [12] ZARIPHOPULOU T. “Consumption-Investment Models with Constraints”. *SIAM Journal Control and Optimization*, pages pp. 59–84, 1994.

UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE CEREG

E-mail address: alois_kanyinda@yahoo.com, alois.kanyinda@dauphine.fr