

Conférence AFFI juin 2004**Vertus et Performance du Rebalancement**

Cahier de recherche n° 2004-07

Auteurs

Christophe Leclerc
Directeur de la Recherche
ABF Capital Management
151, rue Saint-Honoré 75001 Paris
Tel : 01 55 04 61 10
Fax : 01 55 04 61 00
cleclerc@abf-cm.fr

Jean-François Boulier
Responsable de la Gestion de Taux Euro et Crédit
CA-AM, CLAM
168 rue de Rivoli 75001 Paris
Tel : 01 42 95 97 58
Fax : 01 42 95 75 18
jean-francois.boulier@creditlyonnais.fr

Ce papier sera présenté lors de la conférence par Monsieur Christophe Leclerc

Vertus et Performance du Rebalancement

I. Problématique

L'allocation stratégique d'actifs consiste à déterminer les pondérations des différentes classes d'actifs à inclure dans un portefeuille, en fonction des espérances de rentabilité à moyen ou long terme, de l'horizon de placement, des contraintes de passif de l'investisseur et de son degré d'aversion au risque. Cette démarche conduit en général à la définition d'un benchmark cible ou stratégique.

L'allocation tactique consiste à faire évoluer ces pondérations à intervalles réguliers en fonction d'anticipations sur le comportement des différentes classes d'actifs entre elles à court ou moyen terme.

Si on s'affranchit de la question de l'allocation tactique ou si on décide de ne pas faire de paris tactiques, les proportions des différentes classes d'actifs évoluent simplement au gré des variations des différents marchés. Il est alors possible d'adopter les deux attitudes suivantes :

- soit de ne pas intervenir sur le portefeuille (stratégie de buy and hold),
- soit de ramener régulièrement les pondérations à leur valeur d'origine (stratégie de rebalancement systématique).

Ces deux méthodes conduisent à des résultats différents en termes de performance et de risque. Un rebalancement systématique évite aux poids des différentes classes d'actifs de s'écarter durablement des pondérations initiales. Le portefeuille reste donc en phase avec le cadre de risque défini par l'allocation stratégique. Des mouvements sont effectués régulièrement en vendant à la marge les actifs qui se sont le mieux comporté au profit de ceux qui affichent la performance relative la plus basse. A l'inverse, le buy and hold permet a priori de capitaliser la progression de l'actif le plus performant, généralement les actions sur une période suffisamment longue. Par définition, une stratégie de buy and hold ne supporte pas de coûts de transaction.

Alors que les thèmes de l'allocation stratégique et de l'allocation tactique donnent lieu à une recherche académique très nourrie, la question du rebalancement est beaucoup moins bien traitée. Il s'agit pourtant d'un élément important de la mise en œuvre d'une politique de gestion. Si une méthode n'est pas déterminée en amont de l'investissement lui-même, l'investisseur se retrouve rapidement confronté à la question suivante : comment réagir face à la forte hausse relative d'un actif par rapport à un autre ? Cette question est d'autant plus aiguë que le comportement des marchés est marqué, ce qui fut le cas pour les actions au cours des dernières années.

Un certain nombre de travaux récents témoignent cependant d'un regain d'intérêt pour la problématique du rebalancement. Ainsi plusieurs articles du *Journal of Portfolio Management* sont consacrés à ce sujet depuis l'année 2002. Ces références permettent de dégager les principales réflexions et conclusions apportées d'un point de vue académique.

a. Il est nécessaire de rebalancer

Tous les auteurs s'accordent sur la nécessité de rebalancer régulièrement un portefeuille dans une optique de contrôle du risque, du fait de la dérive des pondérations des différentes classes d'actifs au gré de leurs performances respectives. En considérant que les actifs les plus risqués ont une performance supérieure sur moyen ou long terme, leur proportion va s'accroître progressivement, jusqu'à donner à l'investissement un profil de risque très différent de l'allocation d'origine (phénomène de *equity drift*). La principale vertu du rebalancement est donc de maintenir dans le temps le cadre de risque initial.

Dès lors la question n'est plus de savoir si il faut rebalancer, mais comment le faire.

b. Il existe différentes méthodes pour rebalancer

D'une manière générale, le rebalancement peut se faire soit à intervalles réguliers (rebalancement calendaire), soit si les pondérations s'écartent d'un certain niveau par rapport à l'allocation d'origine (rebalancement conditionnel).

Le rebalancement calendaire se caractérise par la fréquence d'intervention, typiquement trimestrielle, semestrielle ou annuelle.

Le rebalancement conditionnel s'appuie sur la définition d'un seuil d'intervention. Ainsi avec un seuil de 5 %, un portefeuille composé à l'origine de 50 % d'actions et 50 % d'obligations sera rebalancé si le poids des actions dépasse 55 % ou passe en dessous de 45 %. Différentes méthodes peuvent être utilisées à ce stade :

- le retour complet à l'allocation d'origine : vente de 6 % si les actions atteignent 56 %
- le retour limité au seuil d'activation : vente de 1 % si les actions atteignent 56 %
- le retour partiel à l'intérieur de la fourchette définie par le seuil : vente de 3.5 % si les actions atteignent 56 %, pour revenir à 52.5 %.
- Le rebalancement ajusté du risque, avec retour partiel à l'intérieur de la fourchette et fixation d'un nouveau seuil intégrant la dérive naturelle de l'actif le plus performant.

La comparaison entre ces différentes méthodes fait intervenir la fréquence des interventions et les coûts de transaction associés. Les différentes études présentées concluent dans l'ensemble à l'optimalité d'un rebalancement conditionnel avec la définition d'une fourchette de pondérations au sein de laquelle aucun mouvement n'est effectué. Le niveau du seuil doit être cohérent avec la volatilité des classes d'actifs considérées et l'aversion au risque de l'investisseur (au sens de la tolérance à la déviation par rapport à l'allocation d'origine).

c. Rebalancer se semble pas pénalisant pour la performance

La plupart des travaux réalisés démontrent la supériorité du rebalancement dans un cadre rendement / risque. Compte tenu du maintien de la volatilité à des niveaux proches de la situation initiale, le ratio de Sharpe du portefeuille est en général nettement plus élevé que dans le cas du buy and hold pour lequel la volatilité augmente à mesure que le poids des actions s'accroît. Sans être toujours explicitement formulé par les auteurs, on constate cependant que la différence en rendement seul est assez faible et plutôt en faveur d'un rebalancement systématique. Arnott [2002] remarque par exemple dans l'une de ses études que la performance nette de coûts de transaction d'un portefeuille équilibré régulièrement rebalancé dépasse celle du portefeuille non rebalancé (*drifting mix*) de 0.30 % par an en moyenne. L'auteur ne développe pas ce résultat mais indique qu'il est surprenant au vu des performances des marchés actions sur la période d'analyse (janvier 1980 à décembre 2000).

C'est cette question de l'écart de performance entre un portefeuille rebalancé et un portefeuille non rebalancé qui est traitée dans ce document. Nous mettrons en évidence les principaux mécanismes du rebalancement, en nous appuyant d'une part sur une étude empirique, et d'autre part sur une analyse formelle. Nous démontrerons que contrairement à l'intuition la performance d'un portefeuille rebalancé est souvent supérieure à celle d'une stratégie de buy and hold. En d'autres termes, nous parviendrons à la conclusion qu'en plus d'être toujours vertueux, rebalancer est en moyenne profitable.

II. Etude empirique¹

L'objet de cette étude est de mettre en évidence les principaux mécanismes du rebalancement à partir de données historiques sur les 30 dernières années. L'analyse porte sur la question suivante : quelle est la différence en terme de performance seule entre un portefeuille rebalancé et un portefeuille non rebalancé ? Le caractère vertueux et nécessaire du rebalancement étant admis, nous allons montrer ici qu'il n'est pas pénalisant du point de vue du rendement, et qu'au contraire il apporte généralement un surcroît de performance par rapport à une stratégie de buy and hold.

a. Cadre d'analyse

Les portefeuilles étudiés sont composés de trois classes d'actifs : obligations domestiques, actions domestiques et actions internationales. Nous nous plaçons dans la position d'un investisseur français. L'horizon d'investissement est de 10 ans. Les séries de données utilisées sont les suivantes :

Obligations domestiques : indice reconstitué à partir des taux de rendement des obligations françaises de plus de 7 ans fournis par DataStream jusqu'en décembre 1985, puis indice JPM France Govt Bond jusqu'à décembre 1998, puis indice JPM EMU Aggregate All Maturities.

Actions domestiques : indice Datastream du marché des actions françaises jusqu'en décembre 1990, puis SBF 120 jusqu'en décembre 1998, puis MSCI EMU.

Actions internationales :

- Europe : indice Datastream du marché des actions européennes jusqu'en décembre 1993, puis indice FTSE Europe
- Etats-Unis : indice S&P 500

Les stratégies de rebalancement étudiées sont d'une part le rebalancement calendaire et d'autre part le rebalancement conditionnel à retour complet aux poids de l'allocation.

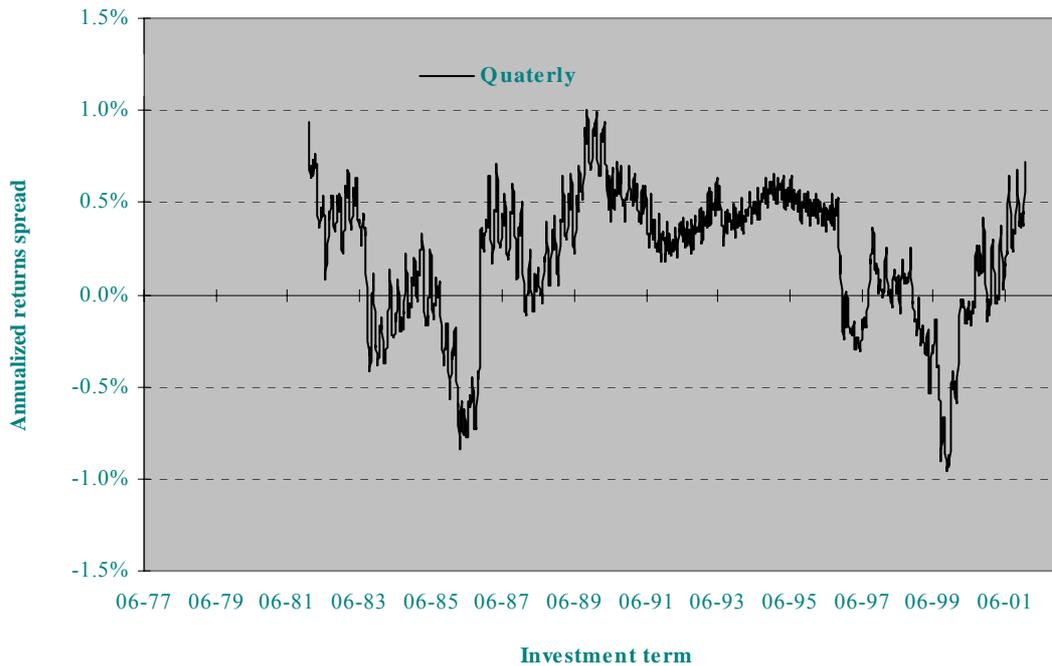
b. Rebalancement calendaire

Considérons dans un premier temps un portefeuille composé de 40 % d'obligations domestiques, 20 % d'actions domestiques et 40 % d'actions internationales (20 % Etats-Unis et 20 % Europe)

Le graphique ci-après présente la série de l'écart des performances annualisées entre le portefeuille rebalancé et le portefeuille non rebalancé, sur un horizon de 10 ans glissant. La fréquence de rebalancement est trimestrielle.

¹ Une partie de ces travaux a été réalisée en collaboration avec Lionel Brafman, alors Directeur des Allocations d'Actifs chez ABF Capital Management. Lionel Brafman est maintenant Directeur de la Gestion chez I.D.E.A.M.

**Rebalanced vs Non-Rebalanced Allocation annualised returns
10 years term**



Le tableau ci-dessous donne quelques paramètres statistiques de cette série de données :

Moyenne	Ecart-type	Minimum	Maximum	5è %ile	95è %ile	% valeurs >0
0.20 %	0.36 %	-0.96 %	1.00 %	-0.52 %	0.66 %	71 %

Ces éléments mettent en évidence les principaux points suivants :

- l'écart de performance entre les portefeuilles rebalancé et non rebalancé est une variable aléatoire qui dépend de la période observée. Cet écart est typiquement compris entre -1% et 1%, avec 90% des observations à l'intérieur d'une fourchette de -0.50% à 0.70%.
- le portefeuille rebalancé surperforme en moyenne de 0.20 % la stratégie de buy and hold, ce qui est significatif compte tenu de l'écart-type de la série et du nombre d'observations (ou de configurations de marché différentes). Traduit en fréquence de surperformance, on constate que le rebalancement systématique est meilleur dans 71 % des cas.
- les configurations défavorables au rebalancement correspondent à des pics de hausse exceptionnelle (par l'ampleur et la durée) des marchés actions (périodes s'achevant à l'été 1987 et à l'automne 2000). Hors ces deux épisodes extrêmes, l'écart moyen est proche de 0.40%. Cette distribution est caractéristique des marchés financiers avec une espérance positive, plus d'observations autour de la moyenne que pour la loi normale, et l'occurrence de valeurs extrêmes négatives.

Le fait qu'une stratégie de buy and hold soit plus efficace en cas de hausse continue et importante du marché actions correspond parfaitement à l'intuition de l'investisseur,

puisque en rebalçant régulièrement il vend à la marge l'actif le plus performant au lieu de capitaliser cet écart. Compte tenu de la prime de risque habituellement attribuée aux actions (rentabilité supérieure sur le long terme par rapport aux obligations), le rebalancement est spontanément perçu comme une contrainte nécessaire (pour ne pas trop s'écarter d'un cadre de risque prédéfini) mais pénalisante du point de vue de la performance. Cette intuition est ici mise en défaut par l'observation, le rebalancement s'avérant en moyenne profitable.

La question qui se pose à ce stade concerne la fréquence du rebalancement : existe-t-il un rythme plus efficace que les autres ?

Le tableau suivant compare les résultats obtenus pour une fréquence mensuelle, trimestrielle, semestrielle et annuelle :

Fréquence	Moyenne	Ecart-type	Minimum	Maximum	5è %ile	95è %ile	% valeurs >0
Mensuelle	0.17 %	0.35 %	-0.99 %	0.85 %	-0.51 %	0.61 %	71.4 %
Trimestrielle	0.20 %	0.36 %	-0.96 %	1.00 %	-0.52 %	0.66 %	71.5 %
Semestrielle	0.20 %	0.36 %	-1.04 %	1.01 %	-0.49 %	0.69 %	71.3 %
Annuelle	0.20 %	0.33 %	-0.97 %	1.24 %	-0.44 %	0.67 %	74.6 %

On constate que ces différentes fréquences sont équivalentes du point de vue de la performance brute, avec un léger avantage pour le rebalancement annuel. Ce résultat est encourageant puisqu'il limite de fait les coûts de transaction induits par une politique de rebalancement systématique : il est aussi efficace de le faire une fois par an que très régulièrement dans l'année.

On peut enfin se demander si ces résultats sont équivalents pour tout type d'allocation. Le tableau suivant compare l'effet d'un rebalancement trimestriel pour différentes répartitions (obligations / actions domestiques / actions internationales).

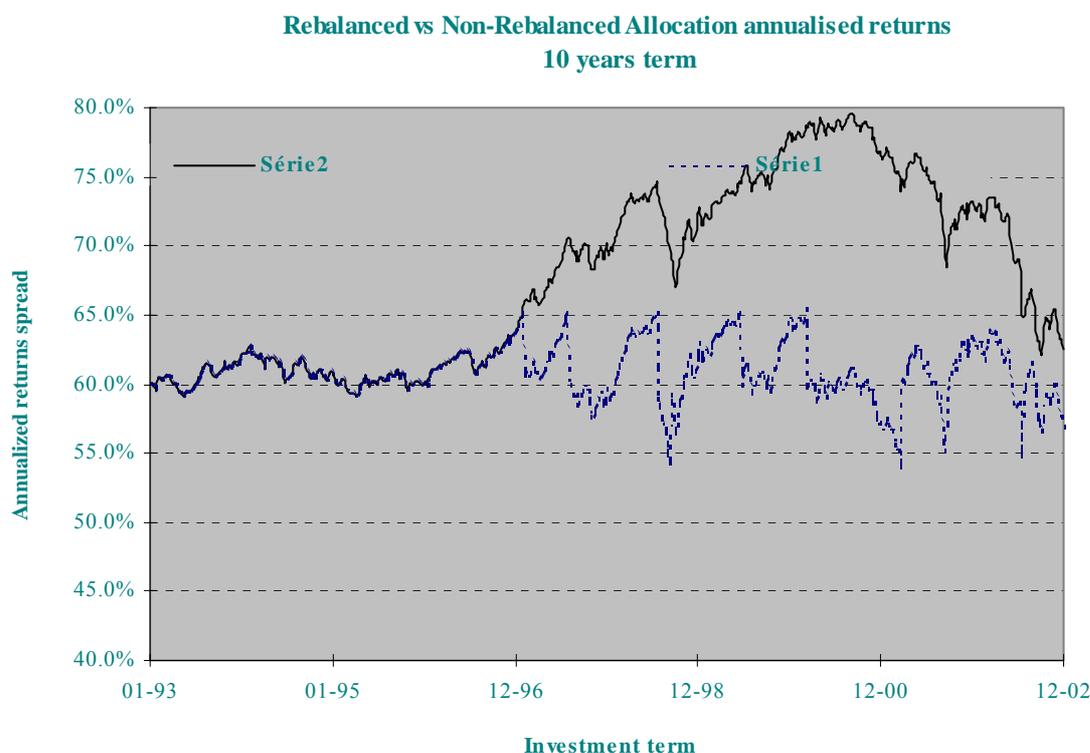
Allocation	Moyenne	Ecart-type	Minimum	Maximum	5è %ile	95è %ile	% valeurs >0
80 / 10 / 10	0.03 %	0.29 %	-1.03 %	0.47 %	-0.54 %	0.33 %	62.4 %
60 / 20 / 20	0.12 %	0.38 %	-1.25 %	0.82 %	-0.63 %	0.56 %	68.1 %
40 / 20 / 40	0.20 %	0.36 %	-0.96 %	1.00 %	-0.52 %	0.66 %	71.5 %
20 / 40 / 40	0.32 %	0.31 %	-0.57 %	1.14 %	-0.20 %	0.83 %	86.3 %

On remarque ici que le rebalancement gagne en efficacité à mesure que le poids des obligations dans l'allocation d'origine est faible. Nous verrons plus loin que ce résultat est lié à l'importance de la volatilité des actifs. A ce stade, il apparaît simplement que la question du rebalancement est d'autant aiguë que le profil de l'investissement est tourné vers les actions.

c. Rebalancement conditionnel

Le rebalancement conditionnel consiste à n'intervenir sur le portefeuille que si les poids de l'allocation d'origine ont dévié au delà d'un certain seuil. L'occurrence de rebalancements et leur nombre est ici lié au niveau de ce seuil et à la volatilité des actifs concernés. Cette stratégie de rebalancement est intéressante d'un point de vue pratique puisqu'elle permet d'une part de mieux expliciter la contrainte de l'investisseur (quel est le seuil au delà duquel le dérive des pondérations n'est plus tolérable) et d'autre part de limiter les mouvements sur le portefeuille en n'agissant que lorsque le seuil est atteint.

Le graphique suivant illustre ce mécanisme de seuil. Il montre l'évolution du poids des actions dans une allocation 40 / 20 / 40 mise en oeuvre le 31/12/1992 via un portefeuille non rebalancé et un portefeuille rebalancé avec un seuil de 5 %. Le rebalancement intervient par exemple lorsque le poids des obligations monte à 45 % ou tombe à 35 %.



On remarque qu'il n'y a aucun rebalancement au cours des quatre premières années, et neuf pendant les six années suivantes au gré des variations très marquées des marchés actions sur la période. Au total, moins d'une intervention par an en moyenne ont suffi à donner à l'investissement un cadre de risque beaucoup plus stable et dans ce cas précis à battre une stratégie de buy and hold de 68 points de base par an.

Le tableau ci-dessous compare les résultats obtenus pour trois niveaux différents de seuil (allocation 40 / 20 / 40)

Seuil	Moyenne	Ecart-type	Minimum	Maximum	5è %ile	95è %ile	% valeurs >0
2.5 %	0.23 %	0.35 %	-0.95 %	1.12 %	-0.38 %	0.74 %	75.7 %
5 %	0.24 %	0.34 %	-0.88 %	1.23 %	-0.37 %	0.75 %	76.6 %
10 %	0.17 %	0.39 %	-0.63 %	1.31 %	-0.33 %	0.93 %	70.7 %

Là encore les résultats sont très similaires entre eux et remarquablement proches des résultats du rebalancement calendaire, notamment annuel, avec un taux de succès de l'ordre de 75 %.

Le choix du seuil peut donc se faire uniquement à partir des préférences de l'investisseur. L'effet escompté sera quasiment le même quel que soit le niveau retenu. Prenons le cas d'un portefeuille composé à l'origine de 50 % d'obligations et de 50 % d'actions, et considérons que l'investisseur s'interdit de détenir plus de 55 % en actions. Le seuil retenu est donc ici de 5 %. Ce seuil sera atteint pour un écart de performance de 22 % entre les deux classes².

d. Coût du rebalancement

L'étude menée conduit à relativiser la question du coût du rebalancement. On a vu en effet que les différentes stratégies sont équivalentes, ce qui autorise l'investisseur à privilégier celles qui sont économes. Ainsi sur la période sous revue et sur un horizon de 10 ans, il y a par définition un rebalancement annuel par an et en moyenne moins de un rebalancement conditionnel à 5 % (aucun de 1993 à 1997 comme vu plus haut, mais deux en 1997, 1998 et 2001). Dans ce dernier cas, ramener le portefeuille à ses pondérations d'origine demande d'acheter et de vendre 5 % des actifs et donc de traiter sur l'équivalent de 10 % du portefeuille. Avec des hypothèses très conservatrices de coûts de transaction de 0.40 % par transaction, un rebalancement complet ne coûte donc que 4 points de base pour le portefeuille. Même avec un seuil plus faible ou une fréquence de rebalancement plus élevée (trimestrielle ou semestrielle), ce coût ne saurait dépasser 10 points de base par an. On doit donc considérer que le rebalancement systématique reste en moyenne plus performant que le buy and hold même après coûts de transaction.

Pour renforcer ou affiner cette conclusion, il serait intéressant de compléter ces travaux en s'intéressant à des horizons de temps différents (5 ans et 20 ans par exemple). On peut également imaginer d'intégrer d'autres classes d'actifs au comportement très marqué sur la période (comme les actions japonaises) ou exhibant des cycles spécifiques (comme l'or ou l'immobilier).

² Dans le cas d'un portefeuille à deux actifs, où p et $1-p$ sont les proportions des actifs et s le seuil, l'écart nécessaire est $e = s / p(1-p)$

III. Analyse formelle

Nous allons ici essayer de mettre en évidence le mécanisme du rebalancement à partir d'une analyse formelle sur un portefeuille à deux actifs. A partir d'une allocation entre ces deux actifs, la question traitée est à nouveau de comparer les performances d'un portefeuille rebalancé et d'un portefeuille non rebalancé sur un horizon de placement T décomposé en n périodes i où interviennent les rebalancements.

a. Illustration : cas de deux périodes

Considérons dans un premier temps un portefeuille composé de 50 % d'actions et 50 % d'obligations, et les performances détaillées dans le tableau ci-dessous.

	Poids initial	Performance période 1	Poids intermédiaire	Performance période 2	Performance totale
Actions	50 %	25.00 %	53.65 %	-8.00 %	15.00 %
Obligations	50 %	8.00 %	46.35 %	1.85 %	10.00 %
Port. Rebalancé		16.50 %		-3.08 %	12.92 %
Buy and hold		16.50 %		-3.43 %	12.50 %

On voit que la performance du portefeuille rebalancé est supérieure de 0.42 % à celle du portefeuille non rebalancé (soit ici 0.37 % en performance géométrique). Ceci est évidemment lié au fait que la baisse des actions au cours de la période 2 ne porte que sur 50 % du portefeuille après rebalancement contre 53.65 % si on n'intervient pas sur le portefeuille à l'issue de la première période.

Soit p le poids initial des actions et e l'écart de performance géométrique entre les deux actifs. On a ici : $1 + e_1 = 1.25 / 1.08$ et $1 + e_2 = 0.92 / 1.0185$, soit $e_1 = 15.74 \%$ et $e_2 = -9.67 \%$

Nous démontrerons plus loin que l'écart de performance géométrique entre les deux portefeuilles est de l'ordre de $-p(1-p)e_1e_2$, soit ici $-e_1e_2/4 = 0.38 \%$.

Ce résultat explicite de manière très simple que rebalancer est favorable si les deux écarts successifs sont de signe opposés. Le gain est proportionnel au produit des écarts, et est donc d'autant plus élevé que l'amplitude des variations relatives des deux actifs est forte. A l'inverse, ne pas rebalancer est plus rentable si les écarts sont de même signe (la performance d'un actif est à chaque fois supérieure à l'autre).

b. Formule générale

Soit deux actifs A et B, de rentabilité a_i et b_i sur les différentes sous-périodes i.

Notons A et B les rendements cumulés sur T des deux actifs. Par définition :

$$1 + A = \prod_i (1+a_i) \text{ et } 1 + B = \prod_i (1+b_i)$$

Soit R un portefeuille composé des actifs A et B dans les proportions p et 1-p et rebalancé à chaque sous-période i. Le rendement cumulé du portefeuille R peut s'écrire :

$$1 + R = \prod_i (1+r_i) \quad \text{avec } r_i = pa_i + (1-p)b_i \text{ et donc } (1+r_i) = p(1+a_i) + (1-p)(1+b_i)$$

Soit R' un portefeuille composé des actifs A et B dans les mêmes proportions, mais non rebalancé. Le rendement cumulé du portefeuille R' peut s'écrire directement :

$$R' = pA + (1-p)B \text{ soit } 1 + R' = p(1+A) + (1-p)(1+B)$$

Soit maintenant e_i l'écart géométrique entre les actifs A et B sur la période i, défini par :

$$1+e_i = \frac{1+a_i}{1+b_i}$$

Cette définition de l'écart permet de créer un actif fictif dont la rentabilité est le rapport des rentabilités des deux actifs. Le rendement cumulé de cet actif E est :

$$1 + E = \prod_i (1+e_i) = \frac{1+A}{1+B}$$

E représente donc l'écart de performance cumulé entre les actifs A et B.

Exprimons à présent $1+r_i$ en fonction de l'écart e_i :

$$\begin{aligned} (1+r_i) &= p(1+a_i) + (1-p)(1+b_i) = p(1+b_i)(1+e_i) + (1-p)(1+b_i) \text{ d'après la définition de } e_i \\ &= (1+b_i)(p(1+e_i) + 1-p) \end{aligned}$$

soit $(1+r_i) = (1+b_i)(1+pe_i)$ (1) et de la même façon :

$$1 + R' = (1+B)(1+pE)$$

Soit G l'écart géométrique entre le portefeuille rebalancé et le portefeuille non rebalancé,

$$1 + G = \frac{1+R}{1+R'} = \frac{\prod_i (1+b_i)(1+pe_i)}{(1+B)(1+pE)} = \frac{(1+B)\prod_i (1+pe_i)}{(1+B)(1+pE)} \text{ par définition de } (1+B), \text{ soit :}$$

$$\rightarrow 1 + G = \frac{\prod_i (1+pe_i)}{1+pE} \quad (2)$$

G représente ici le gain en rendement du portefeuille rebalancé par rapport au portefeuille non rebalancé. Ce gain est positif si $1 + G$ est supérieur à 1. Nous allons donc traiter la question du gain en performance apporté par le rebalancement à travers l'étude de la fonction $1 + G$.

La formule générale (2) appelle les commentaires suivants :

- L'écart de performance sur l'horizon de placement est indépendant du chemin parcouru par la performance relative des deux actifs. Il ne fait intervenir en effet que l'écart total sur la période T et un produit commutatif de termes $(1+pe_i)$ propres à chaque période i. Formulé autrement, cela signifie qu'une hausse continue suivie d'une baisse continue des marchés actions est équivalente du point de vue du rebalancement à une période de forte volatilité où hausses et baisses relatives se succèdent. Seule compte l'amplitude des différents mouvements e_i , l'ordre dans lequel ils se produisent n'ayant pas d'impact.

- L'écart cumulé entre les actifs est au dénominateur. Ceci signifie que le rebalancement est d'autant plus pénalisant qu'il y a une dérive importante d'un actif par rapport à l'autre. On retrouve dans cette expression le phénomène de *equity drift* dont parle les différents auteurs académiques et qui semble rédhibitoire. L'existence d'une prime de risque pour les actions revient en effet à donner à l'écart e une espérance positive égale à cette prime, et la capitalisation de cette espérance semble donner l'avantage à la stratégie de buy and hold. En fait, tout dépendra de la valeur prise par le produit au numérateur.

Pour mieux appréhender ce terme au numérateur, considérons un simple cas à deux périodes, où les écarts sont inversés : e suivi de $1+e' = 1/(1+e)$ soit $e' = 1/(1+e) - 1$ de telle sorte que les deux actifs ont le même rendement cumulé ($1+E = 1$ et donc $E = 0$). On a alors :

$$1 + G = (1 + pe)(1 - p \frac{e}{1+e}) \text{ et } G = p(1-p) \frac{e^2}{1+e}$$

Le gain est donc en e^2 , est maximum pour $p = \frac{1}{2}$ et vaut alors $\frac{e^2}{4(1+e)}$, (0.83 % pour $e = 20$ %).

Plus généralement, pour deux écarts quelconques e_1 et e_2 , on arrive au résultat suivant :

$$\rightarrow G = -p(1-p) \frac{e_1 e_2}{1 + pE} \quad \text{avec } 1 + E = (1 + e_1)(1 + e_2)$$

Cette formule donne le résultat exact du cas présenté au paragraphe a). Le gain était en fait atténué par l'écart cumulé entre les deux actifs, qui était $E = 4.55$ %.

c. Extension dans le cas du rebalancement conditionnel

Il est possible de généraliser ce résultat dans le cadre d'un rebalancement conditionnel, où une intervention sur le portefeuille n'a lieu que si le poids de l'un des actifs atteint un seuil s défini au départ. Par exemple, pour un portefeuille équilibré (50 % pour chaque actif), on a vu que le seuil de 5 % était atteint pour un écart de performance entre les deux actifs de 22 %. Plus généralement, on montre (Annexe 1) que le seuil s est associé à l'écart $e = s / p(1-p-s)$ et que à l'écart inverse $-e/(1+e)$ correspond le seuil symétrique $s' = s(1+pe) / (1+(1-p)e)$. Les deux seuils sont identiques uniquement dans le cas d'un portefeuille équilibré ($p = 50$ %)

Le tableau ci-dessous permet d'illustrer ce mécanisme :

Actions	Obligations	Seuil s	Rebalancer si poids >	Ecart e nécessaire	Seuil s' symétrique	Rebalancer si poids <	Ecart e' inverse
50 %	50 %	5 %	55 %	22.22 %	-5.00 %	45.00 %	-18.18 %
60 %	40 %	5 %	65 %	23.81 %	- 5.22 %	54.78 %	-19.23 %
70 %	30 %	5 %	75 %	28.57 %	- 5.53 %	64.47 %	-22.22 %

Ainsi pour un portefeuille 60 / 40 et un seuil déterminé de 5 %, le rebalancement interviendra si le poids des actions atteint 65 % ou tombe à 54.78 %. Ceci assure que les écarts correspondants soient inverses, c'est à dire que $1 + e' = 1 / (1 + e)$.

Les rebalancements successifs interviennent donc pour des écarts inverses e et $-e / (1+e)$ et on peut calculer le gain $1 + G$ dans le cas de n périodes dont k écarts e et $n-k$ écarts inverses :

$$\prod_i (1+pe_i) = (1+pe)^k (1-p \frac{e}{1+e})^{n-k} = [(1+pe)(1-p \frac{e}{1+e})]^{n-k} (1+pe)^{2k-n} \text{ si } k \geq n/2$$

soit $\prod_i (1+pe_i) = (1+p(1-p) \frac{e^2}{1+e})^{n-k} (1+pe)^{2k-n}$

Par construction $1+E = (1+e)^{2k-n}$, on a donc d'après (2) :

$$\rightarrow 1 + G = (1+p(1-p) \frac{e^2}{1+e})^{n-k} \frac{(1+pe)^{2k-n}}{1+pE} \quad (3)$$

Ainsi exprimé, le gain apporté par le rebalancement est le produit d'un terme favorable qui évolue comme le carré de l'écart élémentaire e , et d'un terme défavorable égal à la pénalité subie par un rebalancement avec $2k-n$ écarts identiques successifs.

- Si il y a $n/2$ oscillations (cas le plus favorable) :

$$E = 0 \text{ et } 2k-n = 0 \text{ donc } 1 + G = (1+p(1-p) \frac{e^2}{1+e})^{n/2}$$

- Si il y a une hausse continue (cas le plus défavorable) :

$$k = n, 1+E = (1+e)^n \text{ et } 1 + G = \frac{(1+pe)^n}{1+pE}$$

Il faut noter que du fait de la stratégie de rebalancement conditionnel qui est adoptée, le résultat (3) est indépendant à la fois du temps et de la forme de la distribution des rendements des actifs. Seule compte ici l'occurrence successive d'écarts inverses qui déclenchent le rebalancement.

Illustration : avec un seuil de 5 % (soit un écart de 22.22 %) et un rebalancement par an en moyenne pendant 10 ans, un portefeuille équilibré (50 % actions, 50 % obligations) conduit aux résultats suivants :

(i) avec 5 oscillations : $1 + G = 1.0515$, soit un gain annualisé de 0.50 %.

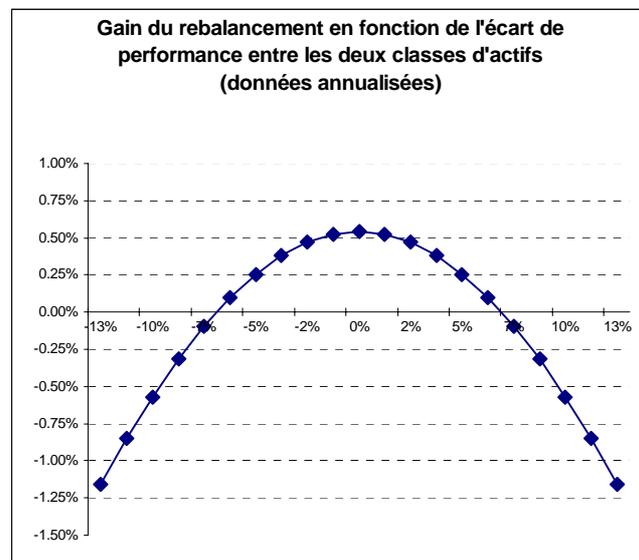
(ii) avec 4 oscillations et deux hausses : $E = 49.38\%$ et $1 + G = 1.0410 \times 0.9901 = 1.0307$, le gain annualisé est donc de 0.30 % malgré la surperformance des actions.

(iii) avec 3 oscillations et quatre hausses : $E = 123.14\%$ et $1 + G = 1.0306 \times 0.9433 = 0.9722$, et dans ce cas le rebalancement est pénalisant et coûte 0.28 % par an en moyenne.

On voit à travers cette illustration que rebalancer est avantageux même dans les cas de surperformance naturelle des actions : le cas (ii) correspond à une prime de risque capitalisée de 4 % par an. La stratégie de buy and hold est plus avantageuse à partir d'un écart bien supérieur entre les rendements des deux classes d'actifs.

On peut représenter graphiquement l'effet de ce mécanisme. On considère cette fois un seuil de 1.5 % atteint une fois par mois en moyenne (cela correspond à un écart de 6.19 % en mensuel, compatible avec une volatilité annualisée de 21-22 %). L'horizon d'investissement est de 10 ans ($n = 120$) et le cas le plus favorable correspond à 60 oscillations ($k = 60$).

Le graphique ci-dessous montre le gain (ou le coût) du rebalancement en faisant varier k et donc l'écart total entre les deux actifs.



On voit à nouveau que le rebalancement dégage une performance supérieure à la stratégie de buy and hold tant que l'écart entre les deux actifs reste dans une fourchette « raisonnable ». Sous cette représentation, rebalancer devient pénalisant à partir d'un écart de 7 % par an sur 10 ans, soit un doublement de l'un des actifs par rapport à l'autre. D'autre part, l'équivalent de ce qui est gagné dans le cas le plus favorable (0.50 %) n'est perdu qu'à partir d'un écart de l'ordre de 10 % par an, soit en cumulé environ 150 %. Ceci explique pourquoi rebalancer est en général payant, mais pénalisant en cas de très fortes variations. Ce type de configuration existe dans le monde réel et s'est produit par exemple entre janvier 1991 et décembre 2000. Il faut néanmoins remarquer qu'un écart cumulé de 150 % amène le poids de l'actif performant à 71.5 % et qu'alors la seule considération du contrôle du risque a souvent déjà conduit l'investisseur à agir sur son portefeuille.

d. Approche parallèle pour le rebalancement calendaire

Il est intéressant à ce stade d'étendre les résultats précédents au cas du rebalancement calendaire, en adoptant une démarche similaire à celle qu'a développé Wise [1996] dans le cadre d'un rebalancement continu. Le point de départ de cette approche est un développement limité du logarithme de l'écart de performance entre les deux actifs. Wise considérait le cas d'un actif plus du cash non rémunérateur. Notre définition de l'écart e permet d'étendre l'analyse à un portefeuille de deux actifs. Cette approche nécessite d'avoir une fréquence de rebalancement suffisamment élevée pour que la volatilité des écarts de performance entre les deux actifs ait un sens du point de vue statistique, et que ces écarts eux-mêmes soient relativement petits en valeur absolue. Dans ces conditions, l'analyse ci-dessous ne nécessite pas d'hypothèses particulières sur la forme de la distribution des rendements.

Au voisinage de 0, $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$

Donc pour une succession de n écarts e_i suffisamment petits, on a :

$$\ln(1+pe_i) = pe_i - \frac{1}{2}p^2e_i^2 + O(e_i^3)$$

et $p\ln(1+e_i) = p(e_i - \frac{1}{2}e_i^2 + O(e_i^3)) = pe_i - \frac{1}{2}pe_i^2 + O(e_i^3)$

donc $\ln(1+pe_i) - p\ln(1+e_i) = \frac{1}{2}p(1-p)e_i^2 + O(e_i^3)$

soit $\ln(1+pe_i) = p\ln(1+e_i) + \frac{1}{2}p(1-p)e_i^2 + O(e_i^3)$

en faisant la somme sur i des différents termes, on a alors au deuxième ordre :

$$\ln\left(\prod_i(1+pe_i)\right) = \ln\left(\prod_i(1+e_i)\right)^p + \frac{1}{2}p(1-p)\sum e_i^2$$

et en prenant l'exponentielle :

$$\prod_i(1+pe_i) = \left(\prod_i(1+e_i)\right)^p \exp\left(\frac{1}{2}p(1-p)\sum e_i^2\right) = (1+E)^p \exp\left(\frac{1}{2}p(1-p)\sum e_i^2\right)$$

On peut alors écrire le gain du rebalancement sous la forme :

$$1 + G = \frac{\prod_i(1+pe_i)}{1+pE} = \frac{(1+E)^p}{1+pE} \exp\left(\frac{1}{2}p(1-p)\sum e_i^2\right)$$

Soit σ^2 la variance des e_i et v leur moyenne : $\sum e_i^2 = n(\sigma^2 + v^2)$

En pratique v est petit et v^2 est négligeable devant σ^2

On a alors : $1 + G = \frac{(1+E)^p}{1+pE} \exp\left(\frac{1}{2}p(1-p)n\sigma^2\right)$, soit pour un portefeuille équilibré ($p = \frac{1}{2}$)

$$\rightarrow 1 + G = \frac{(1+E)^{1/2}}{1+E/2} \exp(n\sigma^2/8) \quad (4)$$

On retrouve une expression similaire à (3) avec un terme favorable fonction de la volatilité des écarts et un terme pénalisant fonction de l'écart cumulé entre les deux actifs.

On écrira désormais $f_2(E) = \frac{(1+E)^{1/2}}{1+E/2}$

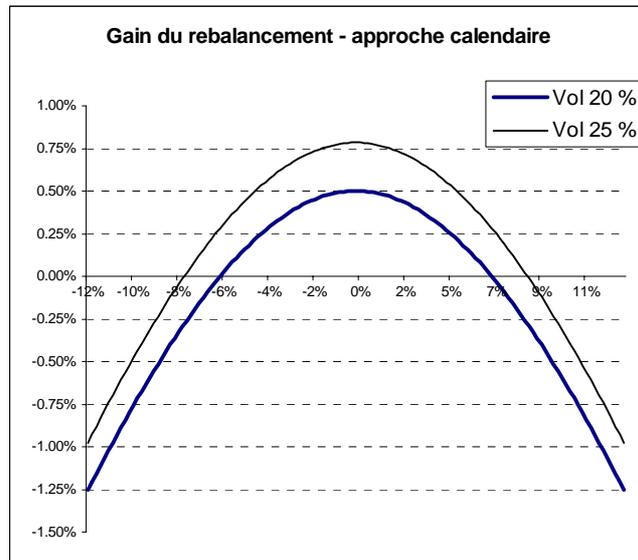
La fonction $f_2(E)$ est toujours inférieure à 1 car $[f_2(E)]^2 = \frac{(1+E)}{(1+E/2)^2} = \frac{1+E}{1+E+E^2/4}$

Exprimons le gain en données annualisées : soit n données sur m années, on aura :

$$1 + g = (1 + G)^{1/m}, \text{ soit avec } \sigma_e^2 = n\sigma^2/m \text{ (}\sigma_e \text{ est la volatilité annualisée des écarts)}$$

$$\rightarrow 1 + g = [f_2(E)]^{1/m} \exp(\sigma_e^2/8)$$

Illustration : le graphique ci-dessous montre, pour des volatilité σ_e de 20 % et 25 % et un horizon de 10 ans, le gain annualisé du rebalancement en fonction de l'écart annualisé ε (avec $(1+\varepsilon)^{10} = 1 + E$).



On retrouve exactement la même courbe que celle de la page 12. On notera qu'une hausse de la volatilité a un impact très significatif sur le gain potentiel apporté par le rebalancement.

e. Probabilité de gain

Poursuivons l'analyse en nous intéressant maintenant à la probabilité que la performance du portefeuille rebalancé soit supérieure à celle du portefeuille buy and hold. Exprimons pour cela d'après ce qui précède les conditions dans lesquelles le gain est positif.

Le rebalancement est plus performant qu'une stratégie de buy and hold si $1 + G > 1$, soit :

$$\frac{(1+E)^{1/2}}{1+E/2} \exp(n\sigma^2/8) > 1 \text{ soit en élevant au carré } \frac{1+E}{1+E+E^2/4} \exp(n\sigma^2/4) > 1$$

G est donc positif si et seulement si $\exp(n\sigma^2/4) > \frac{1+E+E^2/4}{1+E}$ soit $\exp(n\sigma^2/4) > 1 + \frac{E^2}{4(1+E)}$

En posant $\alpha = 4(\exp(n\sigma^2/4)-1)$, le gain est nul pour $1 + \frac{E^2}{4(1+E)} = 1 + \alpha/4$ soit :

$$E^2 - \alpha E - \alpha = 0$$

Les solutions en E de cette équation sont :

$$E_1 = \alpha/2 + [\alpha(1+\alpha/4)]^{1/2} \text{ et } E_2 = \alpha/2 - [\alpha(1+\alpha/4)]^{1/2} \quad (5)$$

Par exemple, toujours dans le cas d'une volatilité de 20 % et d'un horizon de 10 ans :

$$n\sigma^2 = 10\sigma_e^2 = 0.40$$

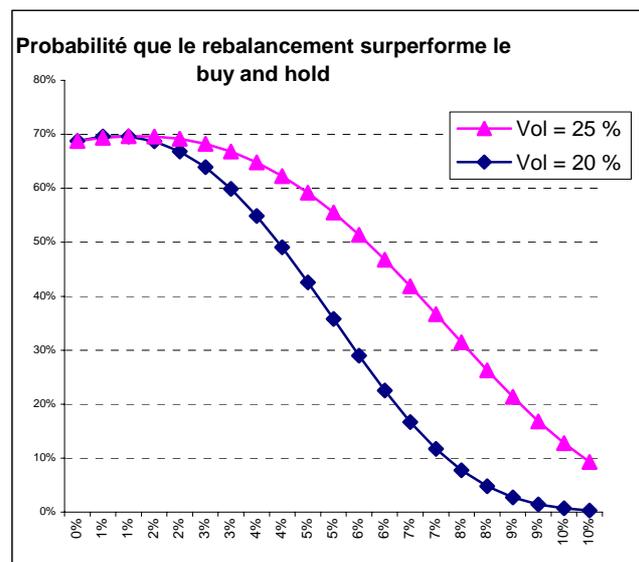
$$\alpha = 0.42$$

$E_1 = 89 \%$ et $E_2 = -47 \%$ soit en données annualisées $\varepsilon_1 = 6.59 \%$ et $\varepsilon_2 = -6.19 \%$

Il faut donc un quasi doublement sur 10 ans (89 %) de l'un des actifs par rapport à l'autre pour que le rebalancement cesse d'être payant, ce qui correspond à un écart annuel moyen de 6.59 %, supérieur à la prime de risque généralement accordée aux actions.

L'annexe 2 détaille le calcul de la probabilité de gain dans le cas où l'écart E suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ_h^2 .

Les résultats obtenus sont illustrés dans le graphique ci-dessous, qui montre cette probabilité de gain en fonction de la prime de risque (différentiel d'espérance de rendement annualisée entre les deux actifs) pour des volatilités annualisées de l'écart de performance entre les actifs de 20 % et 25 % :



Si les deux actifs ont la même espérance de rendement, le rebalancement est plus performant dans 70 % des cas. Pour une prime de risque de 3 % et une volatilité de 20 %, la probabilité de gain est encore de 60 %. Ceci illustre bien la raison pour laquelle rebalancer est souvent plus rentable malgré la surperformance naturelle des actions par rapport aux obligations. Les cas où une stratégie de buy and hold apporte plus de rendement correspondent à des périodes de hausse exceptionnelle des marchés actions. On constate enfin à nouveau le rôle très important que joue la volatilité de l'écart de performance entre les actifs.

On notera pour terminer que ces résultats théoriques sont parfaitement cohérents avec les données empiriques analysées dans la partie II, où sont relevées des probabilités de gain d'environ 70 % avec un surcroît de rendement des actions par rapport aux obligations de 2 % par an en moyenne sur les trente dernières années et une volatilité de l'écart entre les deux classes d'actifs de l'ordre de 20 %.

Conclusion

La question traitée dans ce document est la comparaison du point de vue de la seule performance entre une stratégie de rebalancement systématique et une stratégie de buy and hold. Les différents travaux académiques sur le sujet du rebalancement concluent généralement que rebalancer est nécessaire pour maintenir l'investissement dans le cadre de risque défini au départ et que le rebalancement est plus performant si l'on considère le couple rendement / risque. Cependant, compte tenu de la prime de risque accordée aux marchés actions, on pourrait s'attendre à ce que la stratégie de buy and hold soit plus rémunératrice du fait de la capitalisation du surcroît de rendement de l'actif le plus risqué.

Les travaux exposés ici démontrent qu'en réalité rebalancer est le plus souvent profitable, c'est à dire que la performance sur l'horizon d'investissement est supérieure en rebalçant systématiquement qu'en laisser dériver les pondérations d'origine. L'analyse formelle menée sur un portefeuille de deux actifs explicite ce résultat en faisant apparaître une source de gain relatif liée à la volatilité de l'écart de performance entre les deux actifs. Compte tenu des niveaux de volatilité observés sur les marchés financiers, ce gain est le plus souvent supérieur à la perte relative issue de la dérive des actifs entre eux. Les résultats montrent en effet que le rebalancement, aussi bien calendaire que conditionnel, est plus profitable jusqu'à un écart de performance entre les actifs de l'ordre de 6 % par an, ce qui est supérieur à la prime de risque accordée aux actions. Dès lors rebalancer est une attitude rationnelle même du point de vue de la performance attendue de l'investissement.

Ces résultats sont parfaitement cohérents avec les observations relevées dans l'étude empirique. Sur un horizon de dix ans, nous avons constaté que rebalancer systématiquement est plus performant dans plus de 70 % des cas. Les périodes au cours desquelles ne pas rebalancer était plus payant sont des périodes de hausses exceptionnelles des marchés actions, qui ont été suivies par des violentes corrections. La dérive des pondérations est telle dans ce type de configurations que rebalancer est souvent une obligation en regard des contraintes d'investissement. Ceci conforte la conclusion selon laquelle la mise en place d'une stratégie de rebalancement systématique est l'attitude la plus efficace pour l'investisseur.

Le mécanisme du rebalancement mis en évidence ici laisse imaginer également que cette stratégie serait encore plus pertinente dans le cas d'actifs ayant des espérances de rendement similaires, comme les marchés actions de différentes zones géographiques ou différents secteurs économiques. La même remarque peut s'appliquer aux indices boursiers qui sont pour la plupart calculés suivant un schéma de buy and hold.

Annexe 1

Relation entre le seuil de rebalancement et l'écart de performance entre les actifs

Soit p et $1-p$ les poids d'origine des actifs A et B.

Le rendement du portefeuille sur une période élémentaire peut s'écrire $(1+r)=p(1+a)+(1-p)(1+b)$ et les pondérations des actifs sont devenues $p(1+a)/(1+r)$ et $(1-p)(1+b)/(1+r)$.

Le seuil s est donc atteint pour $p(1+a)/(1+r) = p+s$, soit $s = p[(1+a)/(1+r) - 1]$

On a vu que $(1+r) = (1+b)(1+pe)$

Donc $s = p[(1+e)/(1+pe) - 1]$ soit $s = p(1-p)e / (1+pe)$

En résolvant pour e , on trouve $e = s / p(1-p-s)$

En remplaçant e par $-e/(1+e)$ dans l'équation précédente, on a également $s' = s(1+pe) / (1+(1-p)e)$

Annexe 2

Probabilité de gain

Soit $\sigma_h^2 = \sigma^2$ la variance sur l'horizon de placement. Exprimons les solutions E_1 et E_2 en fonction de σ_h :

$$\alpha = 4(\exp(\sigma_h^2/4)-1) = 4(\sigma_h^2/4 + \frac{1}{2} \sigma_h^4/16 + O(\sigma_h^6)) = \sigma_h^2(1+\sigma_h^2/8) \text{ à l'ordre 4}$$

D'après (5) et avec $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)$, on trouve :

$$E_1 = \sigma_h(1 + \frac{1}{2} \sigma_h + \frac{3}{16} \sigma_h^2) \text{ et } E_2 = -\sigma_h(1 - \frac{1}{2} \sigma_h + \frac{3}{16} \sigma_h^2)$$

On peut alors calculer la probabilité de gain du rebalancement :

$$P(G > 0) = P(E_2 < E < E_1) = P(-\sigma_h(1 - \frac{1}{2} \sigma_h + \frac{3}{16} \sigma_h^2) < E < \sigma_h(1 + \frac{1}{2} \sigma_h + \frac{3}{16} \sigma_h^2))$$

Supposons que E suive une loi normale centrée de variance σ_h^2

Alors $E/\sigma_h \sim N(0,1)$. Avec $\sigma_h = 0.40$, $P(G > 0) = P(-0.83 < E/\sigma_h < 1.23) = 0.89 - 0.19$

Soit $P(G > 0) = 70 \%$

Si maintenant E suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ_h^2 : $(E-\mu)/\sigma_h \sim N(0,1)$ et

$$P(G > 0) = P(1 - \frac{1}{2} \sigma_h + \frac{3}{16} \sigma_h^2 - \mu/\sigma_h < (E-\mu)/\sigma_h < 1 + \frac{1}{2} \sigma_h + \frac{3}{16} \sigma_h^2 - \mu/\sigma_h)$$

soit avec $\sigma_h = 0.40$ et une prime de risque de 2 % capitalisée ($\mu = 22 \%$) :

$$P(G > 0) = P(-1.68 < (E-\mu)/\sigma_h < 0.38) = 67 \% \text{ soit deux fois sur trois.}$$

Pour $\mu = 3 \%$ capitalisé sur 10 ans = 34 %, on a de la même manière $P(G > 0) = 60 \%$; ce n'est qu'à partir de $\mu = 4 \%$ que le rebalancement et la stratégie de buy and hold sont équiprobables en terme de performance.

Bibliographie

Wise A.J., M.A., F.I.A., F.S.S., F.P.M.I., M.B.A.E. “The Investment Return from a Portfolio with a Dynamic Rebalancing Policy” – *British Actuarial Journal*, Volume 2, Part IV, n° 9 (October 1996).

Arnott R.D., and R.M. Lovell. “Rebalancing : Why, How, How often ?” – *The Journal of Investing*, 2, n° 1 (Spring 1993).

Arnott R.D., and L.M. Plaxco “Rebalancing a Global Policy Benchmark” – *The Journal of Portfolio Management*, 28, n° 2 (Winter 2002).

Buetow G.W., Sellers R., Trotter D., Hunt E. and Whipple A. “The Benefits of Rebalancing” – *The Journal of Portfolio Management*, 28, n° 2 (Winter 2002).

Masters S.J. “Rebalancing” – *The Journal of Portfolio Management*, 29, n° 2 (Spring 2003).

Donohue C. and Yip K. “Optimal Portfolio Rebalancing with Transaction Costs” – *The Journal of Portfolio Management*, 29, n° 2 (Summer 2003).