

SEUILS DE RESERVATION OPTIMAUX : APPROCHE PAR LA THEORIE DES VALEURS EXTREMES

Kaouther JOUABER*

1 INTRODUCTION

Les règles de réservations de cotation appliquées à la Bourse de Paris se traduisent par une forte fréquence des réservations sur les titres du Continu B. Des séquences de réservations dans le même sens sont observées de manière répétée sur ce groupe de cotation. Pour certains titres, des séances entières peuvent s'écouler sans qu'aucun prix ne soit coté. La question de l'adéquation des règles de réservation en vigueur et des limites de prix qu'elles imposent se pose alors.

Les limites de prix doivent être définies de telle sorte que la fréquence des dépassements assure la stabilité des cours sans contraindre les stratégies des investisseurs. Elles doivent résulter d'un arbitrage entre une volatilité minimale et une efficacité maximale.

La théorie des valeurs extrêmes peut être d'un apport précieux dans l'optimisation des règles de réservations de cotation. Elle permet le calcul d'une probabilité de déclenchement associée à différentes valeurs du seuil de réservation. La connaissance de ces probabilités peut être un outil de décision mis à la disposition des autorités de Bourse si la réglementation à ce sujet devait être modifiée.

L'objectif de cette étude est de développer une nouvelle approche servant à optimiser les règles de réservation sur la Bourse de Paris en utilisant l'apport de la théorie des valeurs extrêmes. Après une présentation de la théorie des valeurs extrêmes dans la deuxième section, une étude est menée sur des données de la Bourse de Paris.

*CEREG Université de Paris IX Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16. Tel : 01 44 05 42 27, Fax : 01 44 05 40 23, e-mail : jouaber@etud.dauphine.fr

2 ASPECTS DE LA THEORIE DES VALEURS EXTREMES

L'une des caractéristiques de la théorie des valeurs extrêmes est qu'elle se prête aisément aux études empiriques. Le cadre théorique permet de définir les principes généraux qui vont permettre la constitution d'un modèle. Une version économétrique de ce modèle est par la suite testée. Les résultats des estimations permettent d'identifier la distribution des valeurs extrêmes et de faire des prévisions couvrant des zones de valeurs au delà des observations empiriques.

2.1 CADRE THEORIQUE

Considérons une suite de variables aléatoires stationnaires X_1, X_2, \dots, X_n avec une fonction de distribution F . On s'intéresse à $W_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et à $Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, ou de façon générale, à la valeur extrême Y_n telle que $Y_n \in \{Z_n, W_n\}$.

La probabilité que la valeur extrême Y_n soit inférieure à un certain niveau y est donnée par l'expression :

$$P[Y_n \leq y] = P[X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_n \leq y] \quad (1)$$

Si les X_i sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), alors :

$$P[Y_n \leq y] = F^n(y) \quad (2)$$

Les statistiques des valeurs extrêmes s'intéressent aux propriétés de la distribution asymptotique de la statistique Y_n . Leur objectif est de trouver des constantes de normalisation adéquates $a_n > 0$ et b_n telles que :

$$P[a_n Y_n + b_n \leq y] \xrightarrow{w} G(y)$$

ou encore en terme de F

$$F^n\left(\frac{y - b_n}{a_n}\right) \xrightarrow{w} G(y)$$

avec $G(y)$ la distribution asymptotique, a_n la mesure de dispersion et b_n le paramètre de localisation.

$G(y)$ a une forme générale qui apparaît dans Jenkinson (1955) :

$$G(y) = \exp[-(1 - ky)^{1/k}] \begin{cases} \text{pour } y > k^{-1} & \text{si } k < 0 \\ \text{pour } y < k^{-1} & \text{si } k > 0 \end{cases} \quad (3)$$

Il existe cependant trois types de distributions asymptotiques tirées de la forme générale pour différentes valeurs de k , appelées aussi les trois distributions de Fisher et Tippet (1928):

$$\text{Type I } G(y) = \exp[-e^{-y}] \quad \text{pour } -\infty < y < +\infty \quad (4)$$

$$\text{Type II } \begin{cases} G(y) = 0 & \text{si } y \leq 0 \\ G(y) = \exp(-y^{-k}) & \text{si } y > 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Type III } \begin{cases} G(y) = \exp(-(-y)^k) & \text{si } y < 0 \\ G(y) = 1 & \text{si } y \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Le paramètre k mesure la queue de la distribution, ainsi est-il appelé indice de queue. De son signe dépend le type de la distribution asymptotique: à un $k < 0$ correspond une distribution de Fréchet (type II), à un $k > 0$ correspond une distribution de Weibull (type III) et à un $k = 0$ correspond une distribution de Gumbel (type I).

2.2 LE MODELE

Trois méthodes d'estimation des paramètres de la distribution sont possible. La méthode d'estimation par régression est ici détaillée¹. C'est en effet la méthode adoptée pour l'étude des réservations de cotation dans la suite de ce travail.

Pour pouvoir estimer la distribution de Y_n , nous devons disposer de plusieurs observations extrêmes (maximales pour $Y_n = Z_n$ et minimales pour $Y_n = -W_n$).

Pour simplifier, considérons le cas de $Y_n = Z_n$.

Pour cela, considérons dans cette section N échantillons de taille n chacun, pris dans une même population. Dans chaque échantillon, deux extrêmes sont observés: le minimum et le maximum. Notons que le maximum des $N \times n$ observations est le maximum des N maxima.

Soient $Y_{n,1}$ le maximum observé sur le premier échantillon, $Y_{n,2}$ celui observé sur le deuxième échantillon, ..., jusqu'à $Y_{n,N}$ le maximum observé sur le dernier échantillon. Par souci de simplification, on se passera de l'indice n qui fait référence à la taille des échantillons pour avoir les notations Y_1, Y_2, \dots, Y_N .

Quatre étapes vont permettre d'arriver au modèle final à estimer:

Première étape: Les statistiques ordonnées

1. Les autres méthodes d'estimation sont l'estimateur du maximum de vraisemblance d'une part, dont les équations sont données dans l'ouvrage de Tiago de Oliveira (1973), et la méthode présentée par Jansen et De Vries (1991) d'autre part, qui définit un estimateur non paramétrique pour l'indice de queue de distribution.

Les observations extrêmes sont classées dans un ordre croissant. Les statistiques ordonnées ainsi obtenues sont notées $Y_{I_1} \leq Y_{I_2} \leq \dots \leq Y_{I_N}$ ou de façon générale Y_{I_m} , avec $m = 1, 2, \dots, N$ le rang de Y_{I_m} .

Deuxième étape : Le postulat de stabilité

La distribution de la plus grande valeur Y_{I_N} des $N \times n$ observations tend à la même asymptote que les distributions des maxima de tous les échantillons de taille n , si une telle asymptote existe. L'équation (1) appliquée à Y_{I_m} devient :

$$\begin{aligned} P[Y_{I_m} \leq y] &= P[X_1 \leq y] \times P[X_2 \leq y] \times \dots \times P[X_n \leq y] \\ &= \underbrace{F(y) \times F(y) \times \dots \times F(y)}_{n \text{ fois}} \\ &= F^n(y) \end{aligned} \quad (7)$$

Puisque la transformation linéaire ne change pas la forme de la distribution, la probabilité que la plus grande valeur soit inférieure à y doit rester inchangée après l'application de coefficients de normalisation. D'où :

$$F^n(y) = F^n\left(\frac{y - b_n}{a_n}\right) \quad (8)$$

Les deux paramètres a_n et b_n sont fonction de n .

L'équation 8 est appelée *le postulat de stabilité*.

Troisième étape : Le modèle

Pour chaque observation extrême ordonnée Y_{I_m} de rang m , la fonction de distribution F^n est une variable aléatoire qui prend valeur dans l'intervalle $[0,1]$. Elle est distribuée autour de sa valeur moyenne $E[F^n(y)] = \frac{m}{N+1}$. D'où le modèle statistique :

$$\begin{aligned} F^n(y) &= E[F^n(y)] + e_m \\ &= \frac{m}{N+1} + e_m \end{aligned} \quad (9)$$

avec e_m un terme d'erreur.

Quatrième étape : Modèle estimable

Appliquée aux statistiques ordonnées et normalisées, l'équation (3) devient :

$$G(y) = \exp\left[-\left(1 - k\left(\frac{y - b_n}{a_n}\right)^{1/k}\right)\right] \quad (10)$$

En confrontant l'équation (10) qui donne la forme de l'asymptote dans le cas général, et l'équation (9) qui modélise cette asymptote, nous pouvons écrire :

$$\frac{m}{N+1} + e_m = \exp[-(1 - k(\frac{y - b_n}{a_n}))^{1/k}] \quad (11)$$

En lui appliquant deux fois le logarithme népérien et en multipliant à chaque fois par -1 , l'équation (11) devient :

$$-\ln[-\ln(\frac{m}{N+1})] = -\ln[-\ln[\exp[-(1 - k(\frac{y - b_n}{a_n}))^{1/k}]]] + u_m$$

ou encore :

$$-\ln[-\ln(\frac{m}{N+1})] = \frac{1}{k} \ln a_n - \frac{1}{k} \ln[a_n - k(y - b_n)] + u_m \quad (12)$$

u_m étant un terme d'erreur.

Dans le cas particulier de la distribution de Gumbel (type I), défini pour un paramètre $k = 0$ dans l'équation (4), le modèle à estimer est :

$$-\ln[-\ln(\frac{m}{N+1})] = \frac{y - b_m}{a_m} + u_m \quad (13)$$

Le modèle ainsi constitué contient trois paramètres (k , a_n et b_n). Nombre de logiciels avec algorithmes numériques d'estimation des régressions non linéaires peuvent être utilisés pour identifier les paramètres de la distribution extrême.

L'inconvénient de cette théorie est la perte d'information au niveau des données puisque seules les données sur les minima et les maxima sont utilisées. Cependant, en ignorant les données intermédiaires, elle présente l'avantage de ne pas imposer d'hypothèses sur le processus d'évolution de la variable sous-jacente. Elle permet par ailleurs les prévisions par le calcul de probabilité sur des valeurs qui sortent du champ des fréquences observées. Ces prévisions sont tout-à-fait possible puisque, une fois les paramètres du modèle calculés, la forme de la distribution asymptotique des valeurs extrêmes est parfaitement connue. Elle prend la forme de l'un des trois types exposés plus haut. Les avantages de la théorie des valeurs extrêmes ont attiré l'attention des chercheurs en finance qui commencent à l'appliquer dans ce domaine.

2.3 THEORIE DES VALEURS EXTREMES ET LES RESERVATIONS DE COTATION

Développée par des mathématiciens et des probabilistes, la théorie des valeurs extrêmes a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs dans d'autres domaines tels que l'astrono-

mie, la météorologie, l'hydraulique, la physique, l'informatique, la biologie... Son application dans le domaine de la finance est récente et reste encore limitée.

La théorie des valeurs extrêmes présente une échappatoire aux restrictions imposées par les hypothèses nécessaires à la modélisation des cours boursiers. Des auteurs en finance se sont aperçus de l'intérêt d'une théorie qui ne modélise pas les cours, mais seulement leurs minima et maxima d'autant plus que des représentations des distributions empiriques de la rentabilité ont montré l'existence d'un nombre non négligeable d'observations extrêmes. La distribution empirique présente une queue de distribution épaisse comparée à celle d'une loi normale alors que les observations extrêmes ont toujours été considérées comme exceptionnelles et donc négligeables par les modèles classiques.

Les applications en finance de la théorie des valeurs extrêmes touchent à plusieurs volets dans lesquels l'événement rare est primordial, du fait qu'il traduit une situation risquée, ou encore une opportunité exceptionnelle. Ainsi, cette théorie a trouvé des applications dans l'anticipation des krachs boursiers (voir Longin (1996), Jansen et de Vries (1991) et De Haan, et al (1993)), des fluctuations anormales des taux de change (voir Hols et de Vries (1991)), les risques dans l'assurance (voir Beirlant, Teugels et Vynckier (1993)), mais aussi dans le choix des portefeuilles (voir Jansen et de Vries (1991) et De Haan, et al (1993)).

La théorie des valeurs extrêmes est également appliquée en matière de réglementation boursière. Longin (1994) et Booth et al (1997) appliquent la théorie des valeurs extrêmes au domaine de la réglementation des conditions de marge sur les marchés de futures. En calculant la probabilité de violation associée à différents niveaux de marge, l'auteur présente une base pour la définition d'un niveau optimum de marge à appliquer. Ce niveau serait celui auquel est associée la probabilité de violation que les autorités seraient à même de supporter.

Par application des règles de réservation, la cotation des titres est interrompue dès que le cours dépasse un seuil de réservation défini pour chaque groupe de cotation. Ce seuil constitue donc une variation maximale (à la hausse ou à la baisse) permise. Il peut être repoussé trois fois durant une même séance. Un seuil de variation total applicable à une séance boursière peut par conséquent être calculé.

L'étude de la fréquence de réservation sur la Bourse de Paris dans le premier chapitre de cette partie, montre un recours marqué aux réservations, spécialement sur les titres cotés en continu B. De plus l'étude des séquences de réservation sur le continu B avait mis en évidence l'existence d'un nombre non négligeable de réservations successives, souvent adjacentes, sur une même séance. L'application de la théorie des valeurs extrêmes dans ce domaine permet de calculer une probabilité de déclenchement des différents seuils de réservation, ce qui peut être un outil de décision permettant une meilleure appréhension des limites de prix et facilitant le choix des seuils optimaux de réservation.

Booth et Broussard (1997) présentent une étude sur l'optimisation des mécanismes de coupe-circuit appliqués à l'indice DJIA sur NYSE. Cette étude est motivée par le fait que le niveau de variation permise de l'indice est défini en valeur absolue plutôt qu'en valeur relative. Ainsi, les transactions sont arrêtées lorsque la valeur de l'indice baisse d'un certain nombre de points (350 points en 1997). Mais au cours du temps, avec l'évo-

lution de la valeur du DJIA, la variation permise exprimée en pourcentage de la valeur de l'indice est passée de 11,7% à 5,3%. D'où l'intérêt d'une nouvelle réglementation qui maintiendrait fixe ce pourcentage de variation. Les auteurs font alors appel à la théorie des valeurs extrêmes pour estimer les paramètres de la distribution des variations extrêmes à la baisse de l'indice. A partir de ces résultats, des probabilités de dépassement de différents seuils possibles sont calculées. Leur connaissance devrait permettre de choisir le seuil optimal à appliquer en fonction d'un arbitrage entre les coûts et les bénéfices d'un arrêt des transactions.

La théorie des valeurs extrêmes est utilisée dans la suite afin d'envisager des seuils théoriques de réservation sur la Bourse de Paris et de leur associer des probabilités de déclenchement en fonction des groupes de cotation.

3 DONNEES

L'étude est menée sur deux échantillons : le premier comporte des titres cotés en continu A et le deuxième, des titres cotés en continu B. La séparation selon le groupe de cotation est primordiale dès lors que les seuils de réservation sont différents sur chacun des deux groupes. La probabilité de réservation est donc définie différemment selon l'appartenance du titre observé.

Soient $X_{t,i}$ la variation de cours à l'instant i de la séance t , calculée par rapport au dernier cours de clôture.

$$X_{t,i} = \frac{P_{t,i} - P_{c,(t-1)}}{P_{c,(t-1)}}$$

avec $P_{t,i}$ le prix à l'instant i de la séance t et $P_{c,(t-1)}$ le prix de clôture de la séance précédente.

Soit $Z_t = \max_i(X_{t,i})$, la variation maximale sur une séance et $W_t = -\min_i(X_{t,i})$, la variation minimale précédée d'un signe moins. Avec cette définition, les plus fortes baisses par séance sont positives. En observant N séances, une suite de variations extrêmes peut être constituée. On se propose d'étudier la distribution asymptotique de ces valeurs extrêmes.

Les variations extrêmes sont calculées sur tous les titres du SBF 250 dont le groupe de cotation a pu être identifié entre décembre 1992, date à laquelle les titres ont été classés par la SBF en groupes de cotation, et mars 1994, soit 168 titres cotés en continu A et 53 cotés en continu B observés pendant 322 séances de bourse².

Sur cette période, il y a eu 36 réservations sur les titres de l'échantillon appartenant au continu A, et 387 sur ceux appartenant au continu B (voir tableau 1).

L'application des règles de réservation de cotation limite les variations possible du cours par les variations maximales et minimales autorisées, définies par l'application des

2. Sur la période de l'étude et dans les fichiers de données utilisés (données du CEREGET et données directement demandées auprès de la SBF), le groupe de cotation n'est pas défini pour 29 titres du SBF 250.

	<i>Groupe de cotation</i>	
	<i>Continu A</i>	<i>Continu B</i>
<i>Nombre d'observations</i>	50.877	11.680
<i>Nombre de titres</i>	168	53
<i>Nombre de réservations</i>	36	387
- à la hausse	21	247
- à la baisse	15	140
<i>Variation extrême par séance atteinte</i>	0	47
- à la hausse	0	35
- à la baisse	0	12

TABLE 1 – RÉSERVATIONS DE COTATION SUR L'ÉCHANTILLON

seuils de réservation successifs. Ainsi, à chaque réservation, correspond une variation de prix dépassant celle autorisée à ce moment. Par conséquent, elle n'est pas traduite dans les données extraites sur la base des cours observés. L'utilisation des cours cotés pour le calcul des variations extrêmes quotidiennes exclut en fait les variations au-delà des seuils autorisés quand bien même faisant partie de la distribution des variations extrêmes de prix. Afin d'en tenir compte, trois procédures d'ajustement sont appliquées aux prix réservés. Les méthodes utilisées sont celle du seuil de réservation, celle du milieu de la fourchette et celle du *bid-ask*³.

Les statistiques ordonnées Zt_m et Wt_m sont ensuite calculées pour enfin explorer la distribution des variations extrêmes des variations instantanées de cours. Les paramètres du modèle présenté plus haut (équation (12)) sont estimés.

La combinaison faite entre des données de séries temporelles et des données en coupe instantanée est ici justifiée par le fait que les titres, dont les données sont combinées, sont issus d'un même groupe de cotation et ont donc les mêmes caractéristiques en termes de liquidité et de réglementation. Ils obéissent aux mêmes règles de cotation, notamment en terme de variations quotidiennes maximale et minimale permises, définies en pratique par les seuils de réservation. Par conséquent, si les données sont exprimées en terme de variations de cours, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que les variations extrêmes de cours sur cet ensemble de titres suivent la même distribution.

En outre, les règles de réservation étant unifiées par groupe de cotation, il est plus intéressant de déterminer des seuils optimaux de réservation par groupe plutôt que des seuils optimaux par titre.

3. La méthode du seuil consiste à remplacer le prix non observé pour cause de réservation par la limite de prix franchie au moment de la réservation. Dans la deuxième méthode d'ajustement, le prix non observé est remplacé par le milieu de la fourchette. Le principe de la méthode du *bid-ask* est de réintroduire le prix réservé à la valeur du *bid* dans le cas d'une réservation à la baisse et à la valeur du *ask* dans le cas d'une réservation à la hausse

4 STATISTIQUES DESCRIPTIVES

Le tableau 2 regroupe des statistiques descriptives sur chacun des échantillons. Le panel 1 et le panel 2 donnent les caractéristiques, respectivement, des variations maximales et minimales sur le continu A. Les panels 3 et 4 s'intéressent, respectivement, aux caractéristiques des variations maximales et minimales sur le continu B.

Les variations quotidiennes moyennes sont autour de 1,1% sur le continu A et de 1% sur le continu B avec, cependant, un écart-type plus élevé pour le dernier groupe. Du fait des règles de réservation en vigueur qui sont moins contraignantes sur le continu A, les variations maximales à la hausse et à la baisse observées sont plus importantes sur le continu A. Toutefois, après ajustement pour les réservations de cotation, des variations quotidiennes supérieures sont enregistrées sur les titres du continu B. En effet, le faible nombre de réservations et l'absence de réservations successives enregistrées sur le continu A, font que les corrections faites ici ne changent pas l'ampleur de la variation totale quotidienne, mais affectent seulement la moyenne des variations extrêmes. Inversement, les réservations étant assez fréquentes et souvent successives sur le continu B, les variations de cours sur les titres de ce groupe touchent plus fréquemment la limite journalière imposée. Ainsi, lorsque les variations extrêmes sont ajustées, leur maximum se trouve déplacé au-delà de sa valeur observée. D'où des maxima de variations corrigées souvent plus élevés sur les titres du continu B. Si les seuils de réservation retardent le processus de variation des prix en séance, ils n'ont que peu d'effets en terme de variation totale journalière sur le continu A. L'information résiduelle non traduite dans les cours d'une séance dans sa globalité est, par conséquent, relativement faible sur ce groupe de titres. Ce n'est cependant pas le cas sur le continu B puisque les seuils de réservation affectent aussi la variation totale quotidienne. Une part de l'information se trouve ainsi reportée sur la séance suivante induisant une continuité dans les cours.

Le coefficient d'asymétrie (skewness) est positif et significativement différent de zéro au seuil 1% sur tous les échantillons. Les distributions des variations extrêmes de cours sont donc décalées vers la droite. Etant donné que le signe des variations minimales par séance a été inversé ici, le décalage est vers les valeurs positives pour les variations maximales par séance, et vers les valeurs négatives pour les variations minimales. Les queues de distribution seront estimées dans la section 6. Le coefficient d'asymétrie étant plus élevé sur le continu A par rapport au continu B, et aussi dans le cas des variations maximales comparées aux variations minimales, l'indice de queue de distribution devrait aussi être plus élevé dans ces cas.

Le coefficient de kurtosis mesure le degré de concentration des observations autour de la valeur moyenne, il est aussi appelé coefficient d'aplatissement. Il est positif, supérieur au coefficient d'une distribution normale (0,263) et est significativement différent de zéro sur tous les échantillons. Les distributions des variations extrêmes de cours sont donc leptokurtiques avec une forte concentration autour de la moyenne. Sur les variations de cours observées, le kurtosis est plus élevé sur le continu A. Dans les limites définies par les seuils de variations journalières permises, la distribution des variations sur le continu B serait plus aplatie que celle des variations sur le continu A. Cette constatation est tout à fait attendue puisque la réglementation permet aux variations de cours sur le continu A

	<i>Moyenne</i> en %	<i>Ecart-type</i> en %	<i>Maximum</i> en %	Skewness	Kurtosis
Panel 1 : Variations maximales continu A					
<i>Variations maximales</i>	1,09128	1,57277	16,93182	1,63652	6,43142
<i>Variations corrigées par :</i>					
- <i>Seuil de réservation</i>	1,09193	1,57523	16,93182	1,64836	6,50475
- <i>Milieu de fourchette</i>	1,09141	1,57331	16,93182	1,64164	6,47273
- <i>Bid-Ask</i>	1,09174	1,57531	16,93182	1,66524	6,72935
- <i>maximum de tous</i>	1,09210	1,57734	16,93182	1,67494	6,78592
Panel 2 : Variations minimales continu A					
<i>Variations minimales</i>	1,08490	1,40394	18,56287	1,31725	6,22808
<i>Variations corrigées par :</i>					
- <i>Seuil de réservation</i>	1,08657	1,41111	18,56287	1,37711	6,73144
- <i>Milieu de fourchette</i>	1,08493	1,40392	18,56287	1,31727	6,22843
- <i>Bid-Ask</i>	1,08496	1,40390	18,56287	1,31736	6,22864
- <i>maximum de tous</i>	1,08642	1,41100	18,56287	1,37748	6,73259
Panel 3 : Variations maximales continu B					
<i>Variations maximales</i>	0,99045	1,81484	10,30928	0,79466	3,08689
<i>Variations corrigées par :</i>					
- <i>Seuil de réservation</i>	1,00070	1,83410	10,31563	0,85854	3,29546
- <i>Milieu de fourchette</i>	1,00556	1,90018	39,55823	1,97041	23,33081
- <i>Bid-Ask</i>	1,01680	1,96645	39,75904	2,63898	31,12275
- <i>maximum de tous</i>	1,02185	1,97578	39,75904	2,63345	31,59466
Panel 4 : Variations minimales continu B					
<i>Variations minimales</i>	0,89305	1,61566	9,67347	0,42992	3,11819
<i>Variations corrigées par :</i>					
- <i>Seuil de réservation</i>	0,90341	1,63610	9,69063	0,51269	3,33331
- <i>Milieu de fourchette</i>	0,89984	1,64033	19,04167	0,63884	4,84101
- <i>Bid-Ask</i>	0,90895	1,68421	27,08333	1,19499	12,43914
- <i>maximum de tous</i>	0,91421	1,69260	27,08333	1,20688	12,25510

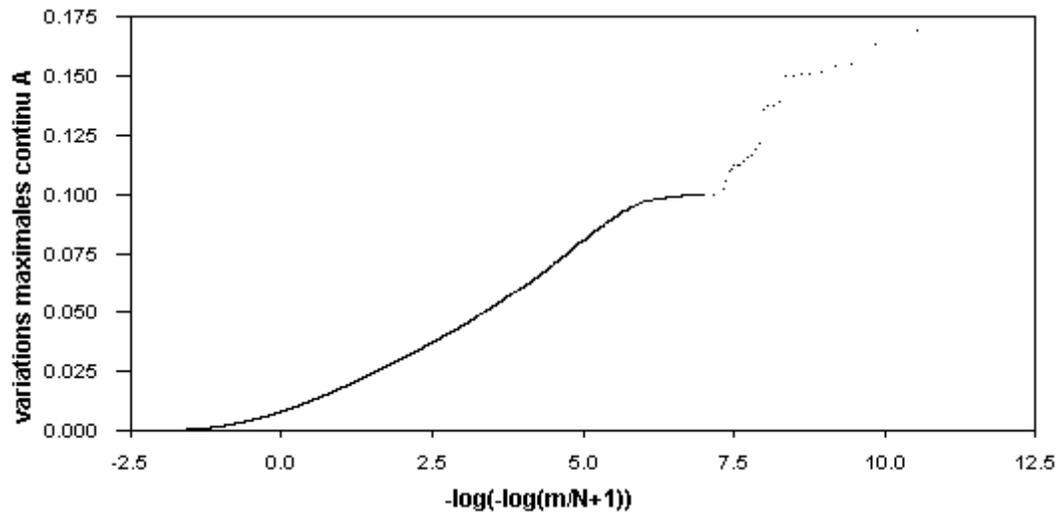
NOTE :Ce tableau regroupe les caractéristiques statistiques (moyenne, écart-type, maximum, minimum, skewness et kurtosis), en colonne, des variations extrêmes quotidiennes de cours. Quatre panels de données sont représentés. Dans la première partie du tableau, le panel 1 couvre les variations à la hausse (variations maximales) sur le continu A. Le panel 2 réunit les variations à la baisse précédées du signe moins (variations minimales) sur le continu A. Les panel 3 et le panel 4 couvrent, respectivement, les variations à la hausse et à la baisse (multipliées par (-1)) sur le groupe de cotation continu B. Sur chaque panel, la première ligne donne les statistiques descriptives des variations extrêmes quotidiennes calculées par rapport à la clôture de la séance précédente. Les lignes suivantes donnent les caractéristiques des variations extrêmes corrigées des réservations de cotation suivant la procédure mentionnée dans la première colonne (seuil de réservation, milieu de la fourchette, *bid-ask* et la valeur maximale de toutes ces procédures).

TAB. 2 – STATISTIQUES DESCRIPTIVES SUR LES VARIATIONS QUOTIDIENNES DE PRIX

de prendre valeur sur un domaine plus large que sur le continu B. Les observations éloignées de la moyenne deviennent donc rares sur le continu A, alors que l'ensemble des observations se répartit sur toute la plage permise sur le continu B. D'ailleurs, lorsque ce domaine de variation est élargi, le kurtosis sur le continu B devient comparable à celui du continu A lorsque l'on corrige les variations par la méthode du seuil, et le dépasse même avec les autres méthodes. L'effet de la présence des règles de réservation peut être rapproché à l'effet d'un zoom appliqué à la distribution dans les limites des seuils de réservation quotidiens.

5 TESTS GRAPHIQUES

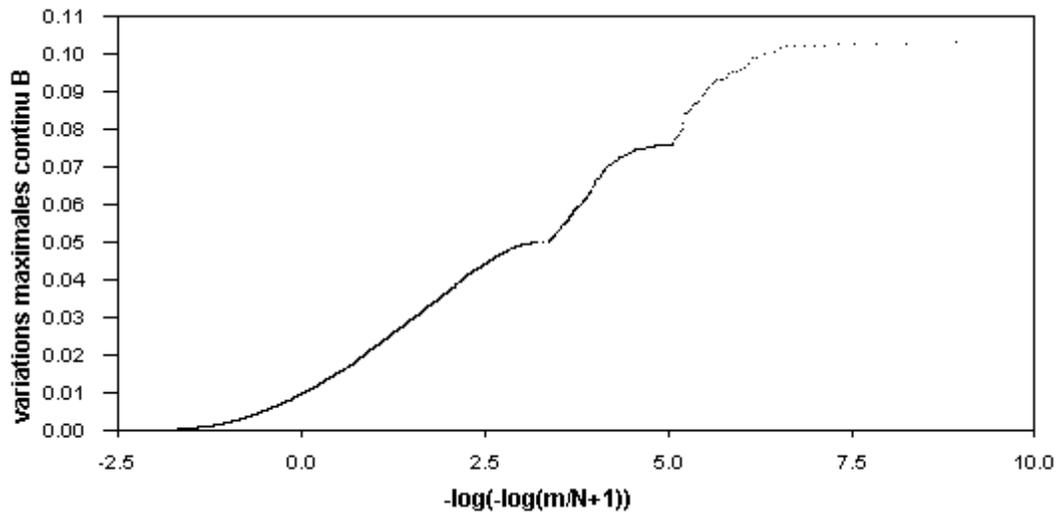
Une exploration graphique, proposée pour la première fois par Gumbel (1958), permet d'identifier le type de la distribution extrême. Il s'agit, en effet, de représenter les couples $(-\ln[-\ln(\frac{m}{N+1})]; Y_{I_m})$. Une droite correspond au type I (Gumbel), une courbe concave au type II (Frechet) et une courbe convexe au type III (Weibull)⁴. Les courbes obtenues sur les deux groupes de cotation sont représentées dans les figures 1, 2, 3 et 4. A la vue de ces graphiques, il est difficile d'affirmer leur concavité ou leur convexité. Toutefois, les tracés obtenus n'étant pas des droites, le test graphique permet d'éliminer le cas des distributions de type I Gumbel.



NOTE :Les variations maximales quotidiennes sont extraites sur 168 titres du continu A observés entre décembre 1992 et mars 1994. Les variations positives, classées par ordre croissant, forment la série Y_{I_m} et sont représentées dans l'axe des ordonnées. L'axe des abscisses correspond à la valeur $(-\ln[-\ln(\frac{m}{N+1})])$ où m est le rang de l'ordonnée Y_{I_m} et N est le nombre total d'observations (38 165). L'allure de la courbe obtenue dans ce graphique permet d'éliminer la distribution de type I (Gumbel) mais ne permet pas de distinguer clairement entre le type II (Frechet) et le type III (Weibull).

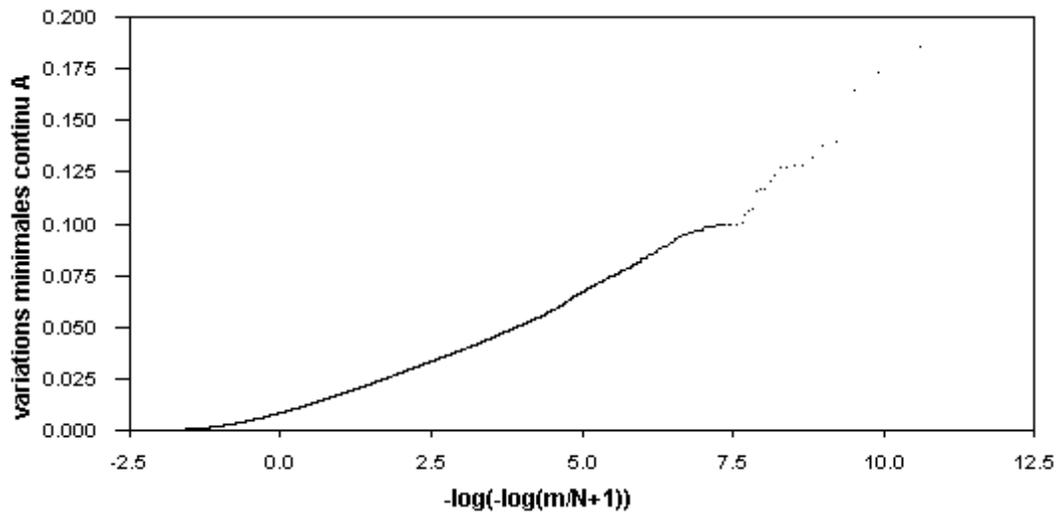
FIG. 1 – TEST GRAPHIQUE SUR LES VARIATIONS MAXIMALES DU CONTINU A

4. Ces types de distribution ont été présentés à la page 3



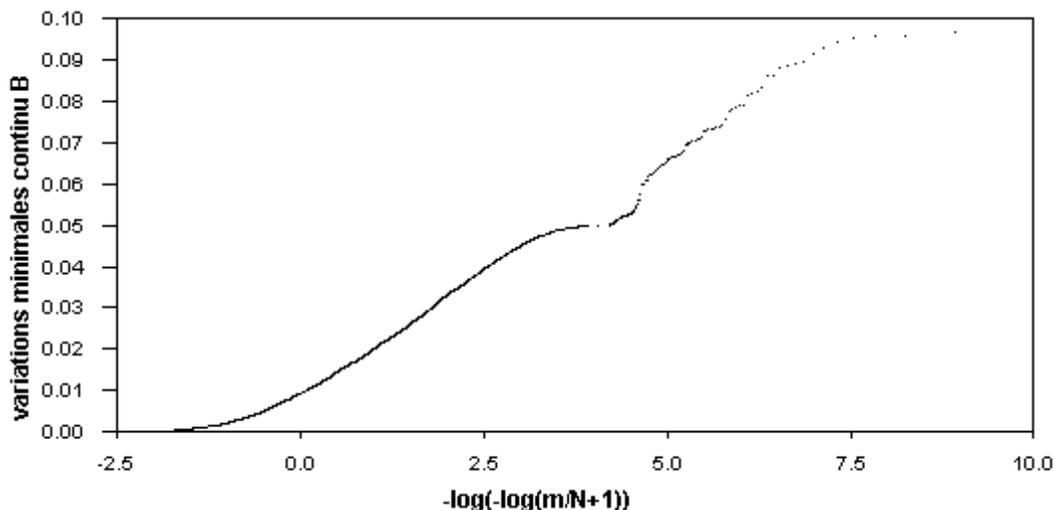
NOTE :Les variations maximales quotidiennes sont extraites sur 53 titres du continu B observés entre décembre 1992 et mars 1994. Les variations positives, classées par ordre croissant, forment la série Y_{I_m} et sont représentées dans l'axe des ordonnées. L'axe des abscisses correspond à la valeur $(-\ln[-\ln(\frac{m}{N+1})])$ où m est le rang de l'ordonnée Y_{I_m} et N est le nombre total d'observations (7 553). L'allure de la courbe obtenue dans ce graphique permet d'éliminer la distribution de type I (Gumbel) mais ne permet pas de distinguer clairement entre le type II (Frechet) et le type III (Weibull).

FIG. 2 – TEST GRAPHIQUE SUR LES VARIATIONS MAXIMALES DU CONTINU B



NOTE :Les variations minimales quotidiennes sont extraites sur 168 titres du continu A observés entre décembre 1992 et mars 1994. Les variations minimales sont multipliées par (-1) et les variations positives obtenues sont ordonnées en ordre croissant. Les observations ordonnées Y_{I_m} sont représentées dans l'axe des ordonnées. L'axe des abscisses correspond à la valeur $(-\ln[-\ln(\frac{m}{N+1})])$ où m est le rang de l'ordonnée Y_{I_m} et N est le nombre total d'observations (39 824). L'allure de la courbe obtenue dans ce graphique permet d'éliminer la distribution de type I (Gumbel) mais ne permet pas de distinguer clairement entre le type II (Frechet) et le type III (Weibull).

FIG. 3 – TEST GRAPHIQUE SUR LES VARIATIONS MINIMALES DU CONTINU A



NOTE :Les variations minimales quotidiennes sont extraites sur 53 titres du continu B observés entre décembre 1992 et mars 1994. Les variations minimales sont multipliées par (-1) et les variations positives obtenues sont ordonnées en ordre croissant. Les observations ordonnées Y_{l_m} sont représentées dans l'axe des ordonnées. L'axe des abscisses correspond à la valeur $(-\ln[-\ln(\frac{m}{N+1})])$ où m est le rang de l'ordonnée Y_{l_m} et N est le nombre total d'observations (7 599). L'allure de la courbe obtenue dans ce graphique permet d'éliminer la distribution de type I (Gumbel) mais ne permet pas de distinguer clairement entre le type II (Frechet) et le type III (Weibull).

FIG. 4 – TEST GRAPHIQUE SUR LES VARIATIONS MINIMALES DU CONTINU B

Ces courbes sont à la fois concaves et convexes par endroits. Elles sont toutes convexes sur une première portion couvrant les faibles variations extrêmes de cours, celles qui sont autour de zéro. Les observations reportées dans cette zone concernent les séances pendant lesquelles le cours n'a pas beaucoup dévié par rapport à la clôture précédente. Certes ces observations sont des valeurs extrêmes, mais les valeurs négatives seront éliminées lors de l'estimation des paramètres du modèle des valeurs extrêmes. Les probabilités seront corrigées en conséquence (voir section 7 plus loin).

Pour les variations extrêmes au delà de cette portion, les courbes sont localement concaves. Les limites des zones de concavité correspondent aux seuils de réservation en vigueur pour chaque groupe de cotation. Sur les courbes 1 et 3, correspondant aux valeurs extrêmes sur le continu A, une première partie concave s'arrête aux abords de 10% (0,100 sur l'axe des ordonnées) de variation, une deuxième à 15,5% (0,155 sur l'axe des ordonnées) pour les valeurs maximales et à 14,5% (0,145 sur l'axe des ordonnées) pour les valeurs minimales. La concavité reprend après ces valeurs pour s'arrêter à une variation maximale correspondant aux limites de variation permise sur une séance. Sur cette dernière partie, les observations sont moins nombreuses mettant en évidence la marge de variation assez large offerte aux cours par les seuils de réservation sur ces titres.

Sur les courbes du continu B (se reporter aux figures 2 et 4), le même phénomène de concentration des observations extrêmes à l'approche des seuils de réservation est observé. Les trois paliers de valeurs sont plus nettement tracés notamment sur la figure

2 des variations maximales. Il y a plus d'observations sur le deuxième et le troisième palier que sur les graphiques du continu A. On retrouve ici la plus forte fréquence de réservation déjà soulignée sur le continu B.

Rappelons qu'il s'agit ici de valeurs extrêmes, c'est à dire des variations maximales enregistrées par séance. L'allure des courbes suggère que sur plusieurs séances, les cours ont approché les limites de prix sans les franchir. En effet, la pente de la courbe s'adoucit en approchant les limites de prix pour réunir un nombre non négligeable de variations de cours à 1 voire 0.5 points de pourcentage du seuil de réservation. Il semble y avoir un effort fourni par les investisseurs sur le marché pour réaliser un maximum de transactions en dessous des limites de prix et retarder par la même les réservations de cotation. Cette constatation reste valable pour les trois seuils définis sur une journée de Bourse.

Le comportement des variations extrêmes de cours semble refléter le fait que le marché anticipe les réservations de cotation et s'efforce de les éviter. Une fois la réservation réalisée, l'évolution des cours reprend une allure plus normale avec des variations maximales par séance occupant de façon plus homogène l'échelle des ordonnées.

La convexité des courbes n'est donc pas établie de façon définitive. Même si les figures montrent une concavité par endroits, il n'est pas prudent d'affirmer que les distributions des valeurs extrêmes sont tirées d'une loi de Fréchet. L'estimation des paramètres du modèle (12) devrait apporter un surplus de précision quant à la forme des distributions.

6 RESULTATS DES REGRESSIONS

Les paramètres du modèle (12, page 5) de distribution asymptotique des variations maximales et minimales quotidiennes sont estimés. Seules les observations positives sont ici prises en compte. Ainsi, les données utilisées sont exclusivement formées des hausses sur les échantillons des variations maximales, et des baisses sur les échantillons de variation minimales. Cette précaution est nécessaire pour le calcul des probabilités qui sera entrepris plus loin.

Les résultats des régressions non linéaires pour les variations observées et les variations corrigées sont groupés dans les tableaux 3 et 4. Les résultats obtenus sur les variations maximales et minimales sont présentés dans les panels 1 et 2 sur le tableau 3 pour les titres du continu A, et dans les panels 3 et 4 sur le tableau 4 pour les titres du continu B.

Tous les R^2 sont élevés, comparables aux résultats obtenus par Longin (1996) et Booth et Broussard (1997). Ils traduisent une bonne représentation de la distribution asymptotique des valeurs extrêmes. Cet indicateur reste en fait valable et significatif dans le cadre des régressions non-linéaires pour lesquelles il n'existe pas de mesures de concordance alternatives. Dans tous les cas, le R^2 est extrêmement élevé, le plus faible étant de 0,9863 pour les variations maximales non corrigées du continu B. De plus, tous les paramètres estimés sont statistiquement significatifs à un seuil inférieur à 1%.

En outre, le paramètre de queue de distribution (k) est dans tous les cas négatif,

	N	k	a	b	R^2
Panel 1 : Variations maximales continu A					
Variations observées	38165	-0,213653 (0,000553)	0,008234 (0,000007)	0,008971 (0,000005)	0,9923
Variations ajustées par					
- Seuil	38165	-0,215150 (0,000551)	0,008228 (0,000007)	0,008967 (0,000005)	0,9935
- Milieu de fourchette	38165	-0,213899 (0,000551)	0,008233 (0,000007)	0,008970 (0,000005)	0,9923
- <i>bid-ask</i>	38165	-0,214632 (0,000544)	0,008228 (0,000007)	0,008680 (0,000005)	0,9925
Panel 2 : Variations minimales Continu A					
Variations observées	39824	-0,156106 (0,000363)	0,007740 (0,000004)	0,009165 (0,000004)	0,9958
Variations ajustées par					
- Seuil	39824	-0,160821 (0,000354)	0,007717 (0,000004)	0,009152 (0,000004)	0,9960
- Milieu de fourchette	39824	-0,156105 (0,000363)	0,007740 (0,000004)	0,009165 (0,000004)	0,9958
- <i>bid-ask</i>	39824	-0,156105 (0,000363)	0,007740 (0,000004)	0,009165 (0,000004)	0,9958

NOTE :Ce tableau regroupe les résultats de l'estimation des paramètres k , a et b du modèle non linéaire $-\ln[-\ln(\frac{m}{N+1})] = \frac{1}{k} \ln a - \frac{1}{k} \ln[a - k(y - b)] + u_m$, où m est le rang de l'observation extrême y , et N le nombre total d'observations donné dans la deuxième colonne du tableau. Pour chaque paramètre estimé, l'écart-type est donné entre parenthèses. Le coefficient R^2 de la régression figure dans la dernière colonne du tableau. Les observations y , variations extrêmes quotidiennes de cours sur le continu A, sont séparées en deux panels. Dans la première partie du tableau, le panel 1 couvre les variations à la hausse (variations maximales) sur le continu A. Le panel 2 couvre les variations à la baisse (multipliées par (-1)) sur le groupe de cotation continu A. Sur chaque panel, la première ligne donne les résultats de l'estimation des paramètres avec y égal à la variation extrême quotidienne calculée par rapport à la clôture de la séance précédente. Les lignes suivantes donnent les résultats obtenus après ajustement des variations extrêmes pour les réservations de cotation suivant la procédure mentionnée dans la première colonne (seuil de réservation, milieu de la fourchette et la méthode du *bid-ask*).

TAB. 3 – RÉSULTATS DES RÉGRESSIONS NON LINÉAIRES
SUR LES DONNÉES DU CONTINU A

	N	k	a	b	R^2
Panel 3 : Variations maximales continu B					
Variations observées	7553	-0,123371 (0,001664)	0,010480 (0,000026)	0,010910 (0,000020)	0,9863
Variations ajustées par					
- Seuil	7553	-0,135040 (0,001664)	0,010444 (0,000026)	0,010893 (0,000020)	0,9864
- Milieu de fourchette	7553	-0,174108 (0,001473)	0,010025 (0,000022)	0,010724 (0,000018)	0,9880
- <i>bid-ask</i>	7553	-0,202405 (0,001399)	0,009818 (0,000020)	0,010614 (0,000017)	0,9890
Panel 4 : Variations minimales continu B					
Variations observées	7599	-0,080186 (0,001595)	0,009535 (0,000023)	0,010253 (0,000018)	0,9864
Variations ajustées par					
- Seuil	7599	-0,098778 (0,001572)	0,009465 (0,000022)	0,010215 (0,000018)	0,9869
- Milieu de fourchette	7599	-0,112961 (0,001416)	0,009284 (0,000020)	0,010154 (0,000017)	0,9884
- <i>bid-ask</i>	7599	-0,153821 (0,001343)	0,008988 (0,000018)	0,010017 (0,000016)	0,9891

NOTE :Ce tableau regroupe les résultats de l'estimation des paramètres k , a et b du modèle non linéaire $-\ln[-\ln(\frac{m}{N+1})] = \frac{1}{k} \ln a - \frac{1}{k} \ln[a - k(y - b)] + u_m$, où m est le rang de l'observation extrême y , et N le nombre total d'observations donné dans la deuxième colonne du tableau. Pour chaque paramètre estimé, l'écart-type est donné entre parenthèses. Le coefficient R^2 de la régression figure dans la dernière colonne du tableau. Les observations y , variations extrêmes quotidiennes de cours sur le continu B, sont séparées en deux panels. Dans la première partie du tableau, le panel 1 couvre les variations à la hausse (variations maximales) sur le continu A. Le panel 2 couvre les variations à la baisse (multipliées par (-1)) sur le groupe de cotation continu B. Sur chaque panel, la première ligne donne les résultats de l'estimation des paramètres avec y égal à la variation extrême quotidienne calculée par rapport à la clôture de la séance précédente. Les lignes suivantes donnent les résultats obtenus après ajustement des variations extrêmes pour les réservations de cotation suivant la procédure mentionnée dans la première colonne (seuil de réservation, milieu de la fourchette et la méthode du *bid-ask*).

TAB. 4 – RÉSULTATS DES RÉGRESSIONS NON LINÉAIRES
SUR LES DONNÉES DU CONTINU B

indiquant une distribution des variations quotidiennes extrêmes de cours du type II, c'est à dire une distribution Fréchet. k étant significativement différent de zéro, le cas d'une distribution Gumbel ($k = 0$) est éliminé d'office. Ce résultat est similaire à ceux des études antérieures faites sur des données du NYSE. Les variations des cours en séance suivent donc une distribution présentant une queue de distribution plus épaisse que celle d'une distribution normale.

Les valeurs de k dans les panels 1 et 2 (continu A, tableau 3) sont supérieures en valeur absolue aux valeurs obtenues sur les panels 3 et 4 respectivement (continu B, tableau 4). En effet, les seuils de réservation sur le continu A étant plus larges, permettent des variations extrêmes supérieures en nombre et en valeur que sur les titres du continu B. Le nombre d'observations dans les queues de distribution est donc supérieur dans le continu A. Les seuils de réservation plus contraignants sur le continu B réduisent l'étendue du champ des variations extrêmes de cours et produisent des distributions moins aplaties.

Après ajustement par la méthode du seuil, la valeur du paramètre k augmente mais reste toutefois en dessous de celle obtenue sur le continu A. L'ajustement par la méthode du *bid-ask* permet d'obtenir les coefficients k les plus élevés sur le continu B. Leurs valeurs respectives sur les variations à la hausse et à la baisse se rapprochent le plus de celles obtenues sur le continu A.

Les résultats montrent également une asymétrie entre les variations extrêmes supérieures et inférieures, et ce sur les deux groupes de titres. La valeur du paramètre k est toujours plus élevée en valeur absolue sur les variations maximales que sur les minimales. Les hausses sont en fait plus fréquentes que les baisses. Ce résultat est confirmé par le nombre de réservations à la hausse plus élevé que celui de réservations à la baisse observées sur la période d'étude (voir tableau 1).

7 PROBABILITES DE RESERVATION ASSOCIEES A DIFFERENTS SEUILS

Les résultats des régressions présentés dans la section précédente ont permis d'identifier les paramètres des modèles estimables des variations extrêmes de cours par séance. Ces paramètres permettent d'estimer la fonction de répartition asymptotique des valeurs extrêmes. Le passage de la fonction de répartition aux probabilités de réservation est présenté dans la première sous-section.

Des seuils de réservation fixes sont appliqués sur les groupes continu A et continu B à la Bourse de Paris. La modélisation selon la théorie des valeurs extrêmes permet une estimation de la probabilité de dépassement de seuils théoriques inférieurs ou supérieurs aux seuils définis par la réglementation. Elle permet ainsi de faire des prévisions sur des probabilité de variations extrêmes supérieures aux variations observées avec les données actuelles des cours. Les résultats pour le continu A et pour le continu B sont présentés dans la deuxième sous-section.

7.1 METHODOLOGIE DE CALCUL DES PROBABILITES

Les valeurs des paramètres de distribution estimés dans la section précédente sont introduits dans l'équation (10) (voir page 4) qui donne la valeur de la fonction de répartition. Ainsi, la probabilité que la variation quotidienne du cours excède une certaine valeur s est le complément à 1 de la fonction de répartition :

$$P[y \geq s] = 1 - F[s]$$

Si s est un seuil de réservation, la probabilité ainsi calculée est la probabilité de réservation à ce seuil. Pour une valeur de s égale à 5%, premier seuil de réservation sur le continu B, elle traduit la probabilité d'avoir une variation quotidienne supérieure ou égale à 5%, c'est à dire la probabilité d'avoir au moins une réservation sur la séance.

Les observations négatives ayant été éliminées lors de l'estimation des paramètres du modèle de distribution asymptotique, une correction de la probabilité calculée avec les paramètres estimés est nécessaire.

Considérons qu'il existe deux états de la nature : le premier est caractérisé par une variation positive des cours, et le deuxième par une variation négative. La probabilité d'observer une réservation de cotation à la hausse dans le deuxième cas est nulle. En posant T le nombre total d'observations, et N le nombre de variations positives, la probabilité modifiée est telle que :

$$P^* = (N/T)P + [(T - N)/T](0) = (N/T)P$$

Le même raisonnement est appliqué dans le cas des variations minimales, sachant que la probabilité d'avoir une réservation à la hausse (à la baisse) sur une séance est nulle si la variation maximale (minimale) sur cette séance est négative (positive).

Pour une meilleure présentation des résultats, la probabilité calculée est exprimée en unité de temps. En effet, à partir de la probabilité, il est possible de calculer une période de retour, c'est à dire le nombre de jours séparant deux variations quotidiennes de cours de même valeur :

$$Retour = (1/P^*)$$

Les périodes de retour ainsi définies sont calculées pour tous les échantillons de données observées et de données corrigées par les différentes procédures d'ajustement.

7.2 RESULTATS

Les résultats obtenus pour les groupes de cotation continu A et continu B figurent dans les tableaux 5 et 6 respectivement. Pour un taux donné de variation du cours,

ces tableaux donnent la probabilité de l'atteindre, probabilité exprimée en période de retour. Les taux de variation extrême quotidienne présentés dans ces tableaux s'étalent de 1% à 25%. Les probabilités associées aux variations maximales sont présentées dans la partie gauche de chaque tableau et celles associées aux variations minimales dans la partie droite. Les probabilités sont calculées sur des données non ajustées ainsi que sur des données ajustées avec les procédures du seuil franchi, du milieu de la fourchette et du *bid-ask*.

Les probabilités calculées sur les plus faibles taux de variation sont identiques ou changent peu en utilisant les données directement observables ou encore après ajustements selon les différentes méthodes. Les probabilités sont cependant divergentes lorsque les seuils les plus larges sont considérés. Le nombre de séances séparant deux variations successives de même ampleur est réduit après ajustement pour les prix manquants traduisant ainsi une plus grande probabilité (plus petite période de retour). Ces résultats reflètent le plus grand nombre d'observations sur les plus faibles taux de variation. La divergence est plus marquée sur les résultats associés aux titres du continu B pour lesquels les observations de variations extrêmes s'arrêtent aux environs d'un taux de 10% (9,691% à la baisse et 10,316% à la hausse). Au-delà de ces taux, les résultats présentent de plus grandes différences.

Les seuils découlant des règles de réservation réellement appliquées à la Bourse de Paris, ainsi que la probabilité correspondante sont mis en gras. Les résultats des probabilités de variations extrêmes avec les taux définis par la réglementation corroborent le fait que les réservations à la hausse sont plus fréquentes que les réservations à la baisse. Avec des données ajustées par la procédure du *bid-ask*, une première réservation à la hausse sur le continu A au seuil de 10% a lieu toutes les 386 séances. Une réservation à la baisse au même seuil se produit une fois toutes les 1007 séances. Les mêmes observations sont faites sur le continu B. De façon générale, les périodes de retour associées aux divers taux de variation à la hausse sont inférieures à celles associées aux taux respectifs de variation à la baisse.

Les taux appliqués à la Bourse de Paris sont symétriques pour les réservations à la hausse et les réservations à la baisse, ils sont de 10%, 5% et 5% sur le continu A et de 5%, 2,5% et 2,5% sur le continu B. Si leur application se traduit par des seuils au même taux de variation pour la première réservation, elle engendre en revanche des variations en pourcentage différentes lorsque l'on considère des séquences de réservations. La probabilité d'observer deux réservations à la hausse sur une même séance est par conséquent associée au seuil de 15,5% sur le continu A. Un titre de ce groupe connaîtra selon les résultats corrigés par la méthode du seuil, une séquence de deux réservations à la hausse par séance tous les 1992 jours. Les séquences de deux réservations à la baisse ont lieu lorsque la variation minimale atteint un seuil total de 14,5% à la baisse. La période de retour correspondant à ce taux de variation minimale dans le tableau 5 est de 5 415 séances.

Un calcul analogue s'applique aux séquences de trois réservations par séance et dans le même sens. La période de retour associée à une séquence de trois réservations à la hausse est de 7 070 séances et celle associée à une séquence de trois réservations à la baisse est de 19 871 jours. Ces résultats traduisent le fait que sur la période d'estimation

Seuil (%)	Variations observées	Variations corrigées			Variations observées	Variations corrigées		
		Seuil	Milieu	<i>bid-ask</i>		Seuil	Milieu	<i>bid-ask</i>
	Variations maximales continu A				Variations minimales continu A			
1%	2	2	2	2	2	2	2	2
2%	5	5	5	5	5	5	5	5
3%	11	11	11	11	13	13	13	13
4%	22	22	22	22	29	29	29	29
5%	40	40	40	40	61	59	61	61
6%	70	69	70	69	118	115	118	118
7%	114	113	114	113	216	209	216	216
8%	178	176	178	177	377	360	377	377
9%	268	264	267	266	627	594	627	627
10%	389	384	389	386	1007	946	1007	1007
11%	551	543	550	546	1564	1457	1564	1564
12%	762	749	760	754	2361	2183	2361	2361
13%	1031	1012	1028	1019	3478	3190	3478	3478
14%	1370	1342	1366	1353	5011	4562	5011	5011
14,5%	1570	1537	1564	1550	5970	5415	5970	5970
15%	1791	1753	1785	1768	7080	6399	7080	7080
15,5%	2037	1992	2030	2009	8358	7528	8358	8358
16%	2308	2256	2300	2276	9826	8819	9826	9826
17%	2936	2865	2924	2892	13423	11966	13423	13423
18%	3691	3597	3676	3633	18072	16005	18072	18072
18,775%	4375	4259	4356	4303	22550	19871	22550	22550
19%	4591	4469	4571	4515	24013	21131	24013	24013
20%	5655	5498	5629	5557	31524	27568	31524	31524
21%	6904	6704	6870	6779	40927	35578	40927	40927
21,275%	7282	7070	7247	7150	43893	38094	43893	43893
22%	8360	8109	8318	8203	52595	45455	52595	52595
23%	10047	9736	9995	9852	66953	57537	66953	66953
24%	11992	11608	11928	11751	84488	72206	84488	84488
25%	14221	13752	14142	13926	105749	89893	105749	105749

NOTE : Ces résultats sont obtenus à partir des résultats de l'estimation des paramètres de la distribution des valeurs extrêmes (voir tableau 3, page 15). La distribution des valeurs extrêmes donne la valeur de la fonction de répartition. La probabilité corrigée P^* en est déduite et est exprimée en période de retour ($1/P^*$). Les périodes de retour sont calculées d'une part pour les données observées et d'autre part après correction pour les réservations de cotation par les procédures d'ajustement (seuil, milieu, *bid-ask*). Les résultats sur les variations à la hausse (maximales) figurent dans la partie gauche du tableau, et sur les variations à la baisse (minimales), dans la partie droite. Pour chaque taux de variation quotidien de cours (colonne seuil), ce tableau donne le nombre de séances séparant deux variations successives supérieure ou égale à ce taux. Exemple : Pour un seuil de 4%, on peut lire qu'une variation quotidienne à la hausse sur le continu A de 4% ou plus a lieu toutes les 22 séances, et qu'une variation à la baisse de même ampleur a lieu toutes les 29 séances. Les seuils de réservation réels sur le groupe continu A sont marqués en gras.

TAB. 5 – PROBABILITÉS DE RÉSERVATIONS ASSOCIÉES À DIFFÉRENTS SEUILS ET EXPRIMÉES EN PÉRIODES DE RETOUR SUR LE CONTINU A

Seuil (%)	Variations observées	Variations corrigées			Variations observées	Variations corrigées		
		Seuil	Milieu	<i>bid-ask</i>		Seuil	Milieu	<i>bid-ask</i>
	Variations maximales continu B				Variations minimales continu B			
1%	2	2	2	2	2	2	2	2
2%	4	4	4	5	5	5	5	5
3%	9	9	9	9	11	11	11	11
4%	18	17	17	17	26	25	25	23
5%	34	33	31	30	57	53	52	46
6%	63	60	55	50	121	107	103	86
7%	113	104	91	81	247	209	196	153
7,375%	138	127	109	96	320	266	246	187
7,625%	159	145	122	107	379	311	286	213
8%	193	176	145	125	487	392	357	258
9%	321	264	224	187	927	709	627	419
9,691%	449	394	297	242	1419	1048	907	575
<i>10%</i>	<i>519</i>	<i>452</i>	<i>336</i>	<i>271</i>	<i>1709</i>	<i>1242</i>	<i>1065</i>	<i>660</i>
10,316%	600	520	379	303	2061	1473	1251	756
11%	816	696	490	382	3063	2112	1755	1007
12%	1252	1047	698	528	5349	3498	2817	1499
13%	1881	1541	975	715	9122	5656	4415	2181
14%	2772	2225	1337	951	15219	8951	6771	3109
<i>14,5%</i>	<i>3342</i>	<i>2656</i>	<i>1556</i>	<i>1090</i>	<i>19508</i>	<i>11174</i>	<i>8323</i>	<i>3686</i>
15%	4013	3158	1803	1246	24885	13884	10182	4351
<i>15,5%</i>	<i>4799</i>	<i>3740</i>	<i>2083</i>	<i>1418</i>	<i>31596</i>	<i>17173</i>	<i>12401</i>	<i>5115</i>
16%	5717	4412	2397	1609	39937	21149	15038	5989
17%	8025	6075	3143	2053	62995	31677	21848	8122
18%	11113	8256	4072	2589	97783	46716	31265	10866
<i>18,775%</i>	<i>14178</i>	<i>10383</i>	<i>4939</i>	<i>3077</i>	<i>136069</i>	<i>62505</i>	<i>40879</i>	<i>13498</i>
19%	15196	11084	5217	3231	149526	67914	44122	14356
20%	20539	14713	6615	3995	225472	97422	61467	18752
21%	27463	19328	8310	4896	335569	138028	84613	24236
<i>21,275%</i>	<i>29694</i>	<i>20798</i>	<i>8834</i>	<i>5170</i>	<i>373527</i>	<i>151593</i>	<i>92203</i>	<i>25963</i>
22%	36354	25145	10348	5952	493326	193303	115184	31021
23%	47673	32420	12782	7183	716920	267795	155181	39348
24%	61972	41449	15672	8608	1030583	367239	207047	49494
25%	79899	52575	19080	10251	1466351	498824	273746	61772

NOTE :Ces résultats sont obtenus à partir de la distribution estimée des valeurs extrêmes (voir tableau 4, page 16). La probabilité corrigée P^* en est déduite et est exprimée en période de retour ($1/P^*$). Les périodes de retour sont calculées d'une part pour les données observées et d'autre part après correction pour les réservations de cotation par les procédures d'ajustement (seuil, milieu, *bid-ask*). Pour chaque taux de variation quotidien de cours (colonne seuil), ce tableau donne le nombre de séances séparant deux variations successives supérieure ou égale à ce taux. Exemple : Pour un seuil de 3%, on peut lire qu'une variation quotidienne à la hausse sur le continu B de 3% ou plus a lieu toutes les 9 séances, et qu'une variation à la baisse de même ampleur a lieu toutes les 11 séances. Les seuils de réservation réels sur le continu B sont marqués en gras, et les seuils appliqués sur le continu A, en italique.

TAB. 6 – PROBABILITÉS DE RÉSERVATIONS ASSOCIÉES À DIFFÉRENTS SEUILS ET EXPRIMÉES EN PÉRIODES DE RETOUR SUR LE CONTINU B

des paramètres, aucune séquence de trois réservations dans le même sens n'a été observée sur le continu A. Ils traduisent la rareté de telles observations.

Avec les seuils réels de réservation, les variations supérieures aux taux permis sont rares et associées à de faibles probabilités de réservation. Au-delà de ces seuils, la probabilité de réservation est encore plus faible. Un relèvement de un point du taux actuel de première réservation de 10% à 11%, engendre une probabilité de réservation réduite de 41% (période de retour de 543 séances). Par analogie avec la définition des seuils réels, les seuils des réservations suivantes seraient de 5,5% chacun, ou encore des variations totales par séance de 17,105% et de 23,546%. Avec ces seuils théoriques, la probabilité d'observer une séquence de deux réservations à la hausse est en diminution de 48% et la probabilité d'observer trois réservations à la hausse de 52%⁵. Ces résultats montrent qu'il ne semble pas être efficace de définir des seuils plus larges que ceux appliqués actuellement sur le continu A et qui engendrent des fréquences de réservations plus faibles que celles observées sur le continu B.

Le tableau 6, présentant les résultats sur le continu B, reproduit également les périodes de retour associées aux seuils de réservations appliqués sur le continu A (valeurs mises en italique).

Avec les seuils de réservation actuels, une première réservation à la hausse sur le continu B a lieu toutes les 33 séances et une première réservation à la baisse, toutes les 53 séances (variations corrigées par le seuil). Ces périodes de retour sont largement en dessous de celles obtenues sur les premières réservations du continu A dans le tableau 5 (384 et 946 séances). Les périodes de retour associées aux séquences de réservations sont également beaucoup plus faibles comparées à celles obtenues sur le continu A. Ainsi, les variations totales permises par séances sont atteintes selon les résultats du tableau 6 toutes les 520 séances pour les variations à la baisse et toutes les 1048 séances pour les variations à la hausse, soit à une fréquence de 13,6 et de 19,7 fois supérieure à celles obtenues sur le continu A. Ces résultats ne sont pas surprenants étant données les observations empiriques mettant en évidence une plus forte fréquence de réservations sur le continu B et l'existence de nombreuses séquences de réservations.

Les périodes de retour des réservations suivant les règles du continu A sont mises en italique. Naturellement, des seuils plus larges permettent de réduire les probabilités de réservations. En outre, sur les données observées ainsi que sur les données corrigées par le seuil, les périodes de retour obtenues sur le continu B sont plus larges que celles obtenues sur le continu A. Pour les variations à la hausse, la période de retour associée à un seuil de 10% sur le continu A est de 384, elle est égale à 452 sur le continu B. Pour les variations minimales, les périodes de retour sont de 946 et de 1242 respectivement sur le continu A et sur le continu B.

Avec les données de milieu de la fourchette, les périodes de retour deviennent plus comparables. Sur les données ajustées par le milieu de la fourchette, une première variation à la hausse de 10% est atteinte toutes les 389 séances sur le continu A et toutes les 336 séances sur le continu B. Les variations à la baisse de 10% sont séparées de 1007

5. Les périodes de retour associées aux seuils de 17,105% et de 23,546% ne sont pas reproduites dans le tableau 5. Après ajustement par la méthode du seuil, elles sont respectivement égales à 2942 et 10758.

jours sur le continu A et de 1065 jours sur le continu B.

Les résultats sont cependant différents après correction avec la méthode du *bid-ask*. A des taux de variation égaux, les périodes de retour sont plus larges sur le continu A. Ainsi, pour les variations à la baisse, la période de retour est de 386 sur le continu A et de 271 sur le continu B. Elle est respectivement égale à 1007 et 660 pour les variations à la baisse de 10%. Les mêmes rapports sont conservés avec les seuils de réservation supérieurs.

8 CONCLUSIONS

Cette étude est une nouvelle application de la théorie des valeurs extrêmes dans le domaine de la finance. Avec cette approche, une probabilité de réservation a pu être calculée pour les seuils en vigueur sur les deux groupes de titres (continu A et B) de la Bourse de Paris, ainsi que pour des seuils fictifs. Les résultats des probabilités de variation quotidienne au-delà de différents taux peuvent constituer une base de réflexion pour le choix de seuils optimaux de réservation. La connaissance des probabilités de réservation associées à différents seuils théoriques permet d'apprécier les conséquences à un niveau pratique de l'application de tels seuils. L'apport de la théorie des valeurs extrêmes ne suffit cependant pas pour définir des seuils ou des fréquences optimales de réservation mais il peut y aider. Les probabilités exprimées en unités de temps séparant deux réservations successives sont en fait une façon de mesurer les coûts et les bénéfices d'une interruption de cotation. L'optimum serait un nombre suffisant de réservations assurant une maîtrise de la volatilité sans pour autant contraindre les stratégies des investisseurs.

Les résultats sont en accord avec les observations empiriques mettant en évidence une plus forte fréquence des réservations à la hausse. Les probabilités des variations à la hausse et celles des variations à la baisse, calculées avec la théorie des valeurs extrêmes, fournissent des indications sur les implications de la définition de seuils de réservation symétriques. En effet, pour un même niveau de variation en valeur absolue, les résultats montrent que la probabilité associée à la baisse est plus faible que celles associée à la hausse. S'il existe une fréquence optimale de réservation, il est possible de la traduire en terme de seuils optimaux et de définir, dans ce cas, des seuils moins contraignants pour les variations à la hausse.

Le modèle reproduit également le fait que la fréquence de réservation est plus élevée sur le continu B que sur le continu A et ce à cause de limites de prix très contraignantes sur le premier groupe. Les résultats permettent d'estimer les effets qu'un élargissement ou, au contraire, un resserrement des taux peut avoir sur la probabilité de réservation. L'application des règles de réservation du continu A au continu B devrait permettre une fréquence de réservation comparable sur les deux catégories de titres. Ainsi, une harmonisation des règles de réservation entre les deux groupes de cotation par l'extension des règles du continu A aux titres du continu B peut a priori être un moyen de mieux optimiser la réglementation des réservations de cotation à la Bourse de Paris. Cependant, des tests restent à faire pour calculer des probabilités de réservation tenant compte d'une

unification des régimes de cotation sur l'ensemble des titres.

Références

- [1] BEIRLANT ET AL (1993), *Extremes in non-life insurance* , EXTREME VALUE THEORY AND APPLICATIONS, J. GALAMBOS ET AL EDITIONS, 489-510.
- [2] BOOTH ET BROUSSARD (1997), *Setting NYSE circuit breaker triggers* , JOURNÉES DE L'AFFI, GRENOBLE, 1997.
- [3] GUMBEL E.J., 1958, *Statistics of extremes* , ED COLUMBIA UNIVERSITY PRESS.
- [4] HAAN ET AL (1993), *Safety first portfolio selection, extreme value theory and long run asset risks*, EXTREME VALUE THEORY AND APPLICATIONS, J. GALAMBOS ET AL EDITIONS, 471-487.
- [5] HOLS ET DEVRIES (1991), *The limiting distribution of extremal exchange rate returns* , JOURNAL OF APPLIED ECONOMETRICS, VOL 6: 287-302.
- [6] JANSEN ET DEVRIES (1991), *On the frequency of large stock returns: Putting booms and busts into perspective* , THE REVIEW OF ECONOMICS AND STATISTICS, : 18-25.
- [7] LONGIN (1994), *Optimal margin level in futures markets: a parametric Extreme-based method* , SEVENTH ANNUAL EUROPEAN FUTURES RESEARCH SYMPOSIUM, BONN - ALLEMAGNE, SEPTEMBRE 1994.
- [8] LONGIN (1996), *The asymptotic distribution of extreme stock market returns* , JOURNAL OF BUSINESS, VOL 69, N 3.
- [9] TIAGO DE OLIVEIRA J., 1973, *Statistical Extremes - A survey* , CENTER OF APPLIED MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, LISBONNE.