UN CADRE UNIFIE POUR LES CONTRATS A TERME

Gilles Desvilles, Cereg Paris Dauphine
desville@club-internet.fr

Il est courant de lire que les contrats à terme financiers, future ou forward, se valorisent de manières bien distinctes selon qu'ils portent sur des actifs négociables ou sur des taux, qu'ils soient d'intérêt court-terme ou de change. L'innovation de ce papier est d'unifier dans un même cadre ces deux types de contrats.

Pour cela, nous employons un modèle mathématique fondé sur le principe de *coût de portage*, qui appartient à la famille des Cost-of-Carry Models dont l'adéquation avec les contrats sur actif financier est universellement admise. Nous conférons la plus grande simplicité à ce modèle afin qu'il offre la meilleure lisibilité car l'indexation des variables pour tenir compte des *fourchettes*, des dates, ou encore de certains particularismes, alourdit très vite les écritures.

Nous intitulons cadre général l'ensemble constitué par ce modèle et l'hypothèse d'un règlement par livraison de l'actif sous-jacent. Dans ce cadre sont d'abord décrits les deux arbitrages comptant-terme *purs*, c'est-à-dire sans risque (partie **I**). L'unité s'obtient ensuite en mettant en évidence les sous-jacents *implicites* des futures de type eurodollar (partie **IV**), des FRAs (partie **V**) et des contrats de devise (partie **VI**), différents de ceux présentés officiellement, et au cas par cas, en modifiant les soldes d'arbitrage avec des termes *additifs* reflétant l'imperfection liée au règlement cash, présentée en partie **II**, et celle liée à la forme linéaire des cotations d'un contrat, présentée aux parties **IV** et **V**. La partie **III**, consacrée au future sur bon du Trésor, est une étape dans l'analyse des futures eurodollar et des FRAs dans le sens où elle pose des arbitrages parfaitement purs. Enfin, la partie **VII** est conclusive.

I <u>UN CADRE GENERAL REALISTE</u>

Le cadre exposé ci-dessous est générique car il concerne un contrat à terme portant sur un actif financier indéfini. Il est réaliste parce qu'il incorpore les fourchettes de cotation des instruments financiers et des taux d'intérêt.

I.1 Cadre général

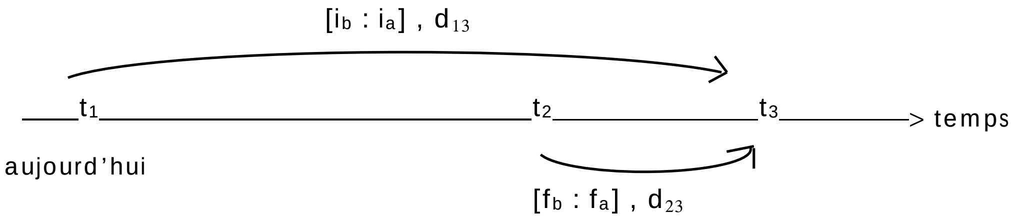
I.1.1 Prêts-emprunts

Les taux d'intérêt au comptant ou cash, c'est à dire portant sur une période débutant à la date contemporaine, sont notés i.

Les taux à terme ou forward, c'est à dire portant sur une période débutant à une date future, sont notés f.

Les taux de placement ou prêt sont indicés b, b comme bid, et ceux d'emprunt sont indicés a, a comme ask. Bien entendu $i_b < i_a$ et $f_b < f_a$ sous peine d'offrir une opportunité d'arbitrage par prêt et emprunt simultanés.

Les taux sont linéaires ou simples et en base annuelle.



En l'absence d'ambiguïté et par souci de simplicité, les taux ne sont pas indicés par les périodes sur lesquelles ils portent.

I.1.2 Sous-jacent

L'actif financier sous-jacent est noté U. Les marchés le nomment comptant ou spot ou encore cash.

U est négociable sur un marché, à la vente au cours U_b — *bid* — et à l'achat au cours U_a — *ask* — . Bien entendu $U_b < U_a$ sous peine d'offrir une opportunité d'arbitrage par achat et vente instantanés. Nous désignons par $[U_b : U_a]$ la fourchette de cotation.

L'actif financier détache un revenu R — un dividende certain pour une action, un coupon pour une obligation — à la date τ.

I.1.3 Contrat générique

Il existe un contrat— forward ou future — sur U, noté F. Ce contrat se négocie à l'achat à F_a et à la vente à F_b. La date d'échéance de F est notée T_1.

F est supposé à règlement par livraison. Les amendements liés à un règlement en espèces ne modifient pas les résultats qui vont suivre et seront exposés dans la seconde partie.

I.1.4 Hypothèse de gestion des appels de marge

Si F est un future, il est supposé sans appel de marge, à l'instar d'un forward. Il est assorti d'un appel de marge unique à l'échéance. L'absence de la première différence de forme va permettre la mise en place d'arbitrages parfaitement sans risque sur les futures.

Une autre formulation de l'hypothèse consiste à dire que les appels de marge sont cumulés sur un compte d'attente jusqu'au jour de l'échéance, et réglés uniquement à cette date. Le compte est non rémunéré mais ne supporte aucun agio en cas de découvert. Il est donc fait abstraction des intérêts sur les appels de marge.

Si ce traitement ne reflète pas strictement la pratique des marchés[1], elle en est cependant une représentation suffisamment proche et pratique pour que chercheurs et Echanges l'aient empruntée dans leurs travaux[2] et présentations[3].

Le prix d'un future avec appel de marge unique à l'échéance n'est cependant pas celui d'un forward. La distinction tient à la seconde différence de forme, le règlement avant terme, et à la différence d'organisation de leurs marchés. C'est cette dernière qui est au centre de cet article[4].

---

[1] Pour évaluer l'importance des intérêts sur les appels de marge, se reporter au chapitre 5,''Arbitrage sur les marchés à terme'', Gilles Desvilles, Thèse de doctorat, Mars 1998.

[2] Citons par exemple ''The quality option implicit in futures contracts'', Gerald D. Gay et Steven Manaster, Journal of Financial Economics, 1984.

[3] Citons par exemple ''Le contrat à terme sur l'indice CAC 40'', Matif, 1989, et ''Treasury Futures for Institutional Investors'', Cbot, 1990.

[4] L'incidence du règlement avant-terme est formalisée notamment dans ''Arbitrage in stock index futures'', Journal of Business, 1990, de Michael J. Brennan et Eduardo S. Schwartz, et dans la thèse de doctorat de Gilles Desvilles.

I.2 Arbitrage pur

I.2.1 Cash and carry (C&C)

Le *cash and carry* est l'un des deux arbitrages purs qui s'effectuent sur les contrats. Comme son nom l'indique, il consiste à acheter avec des espèces et *porter* un actif, en l'occurrence ici l'actif U. Si l'arbitragiste vend en même temps le contrat au cours F_b, il s'engage contractuellement à échanger cet actif U contre le montant F_b, à l'échéance.

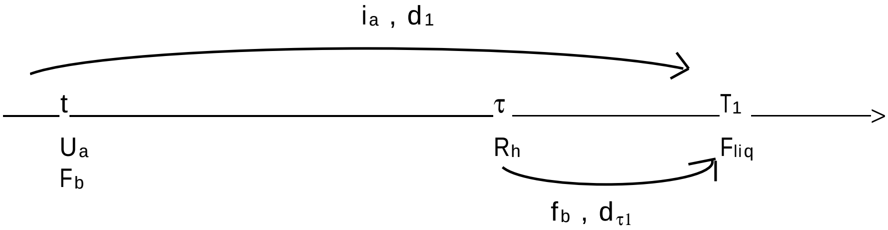
- D'après notre définition générale de l'arbitrage, le solde de l'opération est nul à l'origine. Or si U est acheté comptant, ce solde vaut $-U_a$. Il convient donc d'emprunter pour financer cet achat, et ramener le solde initial à 0.

- Le taux d'emprunt prévalant est $i_{t,ask}^{t,1}$, terme désignant un taux d'emprunt, connu à la date t, couvrant la période t à T_1 . Il s'agit d'un taux comptant linéaire — dit encore *taux simple* — annuel, que nous noterons plus simplement $i_{ask}^{t,1}$, ou encore i_a en l'absence d'ambiguïté.

  Le choix d'une mesure linéaire annuelle répond à un souci de simplicité (nous aurions pu opter pour une mesure actuarielle) et d'adéquation avec les marchés financiers (nous aurions pu opter pour des taux continus).

- Le contrat se négocie à une fourchette $[F_{bid}^{t,1} = F_b : F_{ask}^{t,1} = F_a]$

  Son cours de compensation est F_{comp}^{t} et son cours de liquidation F_{liq}.



- Le taux forward de prêt, connu à la date t, couvrant la période τ à T_1 , est $f_b = i_{t,bid}^{\tau,1}$.

- Nous notons d_1 la durée de vie du contrat — *time to maturity* — en base annuelle:

$$d_{t1} = d_1 = \frac{T_1(\text{jours}) - t(\text{jours})}{365} = T_1(an) - t(an) = T_1 - t,$$

et $\quad d_{\tau 1} = T_1 - \tau \quad$ la durée de replacement en comptant les dates en base annuelle.

Mise à plat des cash flows

Le déroulement du **cash and carry** est le suivant:

actions	flux
en t	
achète — *cash* — actif U	$-U_a$
vend un contrat échéance T_1 à F_b	0
emprunte U_a à i_a	U_a
place forward le montant des revenus	0
solde en t	$S_t = 0$
en τ	
encaissement des revenus	$r_h\, U_a$
replacement des revenus au taux forward f_b	$-r_h\, U_a$
solde en τ	$S_\tau = 0$
en T_1	
livre l'actif U porté jusque là — *carry* —	0
F est un forward: laisse expirer le contrat, reçoit	F_b
F est un future: laisse expirer le contrat, reçoit	F_{liq} } $= F_b$
honore l'appel de marge unique[5]	$F_b - F_{liq}$ }
rembourse l'emprunt	$-U_a\,(1+ i_a\, d_1)$
récupère le placement des revenus	$r_h\, U_a\,(1+ f_b\, d_{\tau 1})$
solde de C&C en T_1	$S_{C\&C} = S_1 = F_b - U_a\,(1+ i_a\, d_1) + r_h\, U_a\,(1+ f_b\, d_{\tau 1})$

[5] Appel de marge unique $= (F_b - F^{t}_{comp}) + \sum_{i=0}^{i=T_1-t-2} (F^{t+i}_{comp} - F^{t+i+1}_{comp}) + (F^{T_1-1}_{comp} - F_{liq}) = F_b - F_{liq}$

A la date t, S_1 est un résultat déjà déterminé, — le solde de l'arbitrage est une variable *déterministe* — parce que r_h, τ et f_b sont connus. C'est pourquoi S_1 est également noté $S_{C\&C}$, où disparaît l'indice temporel témoignant la date T_1. Cette remarque devient une hypothèse dans les cas — nombreux — où le montant et la date de versement des revenus ne sont que des estimations — comme avec les dividendes d'actions — . Nous présentons ici l'arbitrage dans un cadre déterministe, qui pourrait être par exemple celui d'un contrat sur obligation à taux fixe et sans risque de défaut.

Lorsqu'en t les calculs font ressortir un solde S_1 positif, l'arbitrage C&C est initié. La décision d'entreprendre l'arbitrage repose exclusivement sur le résultat à l'échéance, puisque les soldes intermédiaires sont par construction nuls. En outre, ce résultat ne dépend pas du cours de U à l'échéance.

Le dépôt de garantie

Les Echanges imposent que chaque achat ou vente de l'un des ses quatre futures soit accompagné d'un dépôt de garantie, fonction du nominal du contrat. Par exemple sur le Matif:

nom du contrat	Euro Notional	Euro All Sovereign	Euribor	Cac 40
nominal	100 000 EUR	100 000 EUR	1 000 000 EUR	10 x indice CAC40
dépôt de garantie	1 750 EUR	1 500 EUR	500 EUR	2 250 EUR

Des dépôts de garantie en bons du Trésor sont acceptés par les Echanges.

Les dépôts de garantie représentent de 0.2 à environ 5% du nominal des contrats (le nominal effectif de l'Euribor étant le ¼ de 1M EUR). Leur détention est donc beaucoup plus à la portée des arbitragistes que celle des importants montants de cash ou de titres, qu'ils sont généralement obligés d'emprunter pour obtenir des gains tangibles.

Nous supposerons dans tout ce qui suit que l'arbitragiste détient les bons acceptés par l'Echange en qualité de dépôt de garantie, les dépose en tant que tel, et jouit pleinement de leurs intérêts. Dans notre cadre général, le dépôt de garantie ne génère aucun coût, et sa présence est omise.

I.2.2 Reverse cash and carry (RCC)

Si les calculs font ressortir un solde S_1 négatif, l'arbitrage n'est pas initié. Mais il devient tentant de calculer le résultat de l'*inversion* des opérations décrites plus haut, de manière à obtenir l'opposé de S_1 négatif, soit un solde créditeur. L'opération est appelée *reverse cash and carry*, et constitue le second arbitrage pur sur les contrats.

Le déroulement du **reverse cash and carry** est le suivant:

actions	flux
en t	
se fait prêter l'actif U	0
vend l'actif U	U_b
achète un contrat échéance T_1 à F_a	0
place U_b à i_b	$-U_b$
emprunte forward le montant des revenus à restituer au prêteur	0
solde en t	$S_t = 0$
en τ	
perception de l'emprunt au taux forward f_a	$r_s\, U_b$
restitution des revenus	$-r_s\, U_b$
solde en τ	$S_\tau = 0$
en T_1	
se fait livrer l'actif U	0
restitue l'actif U au prêteur	0
F est un forward: laisse expirer le contrat, paye	$-F_a$
F est un future: laisse expirer le contrat, paye	$-F_{liq}$
honore l'appel de marge unique	$F_{liq} - F_a$
	$\left.\begin{matrix}-F_{liq}\\ F_{liq} - F_a\end{matrix}\right\} = -F_a$
récupère le placement	$U_b\ (1+ i_b\ d_1)$
rembourse l'emprunt forward	$-r_s\, U_b\ (1+ f_a\ d_{\tau 1})$
solde de RCC en T_1	$S_{RCC} = S_1 = -F_a + U_b\ (1+ i_b\ d_1) - r_s\, U_b\ (1+ f_a\ d_{\tau 1})$

Lorsqu'en t les calculs font ressortir un solde S_1 positif, l'arbitrage RCC est initié.

I.3 Appartenance au cadre général

I.3.1 Modèle de coût de portage

Si nous faisons une première d'hypothèse de marchés sans coûts de transaction, les cotations bid et ask se confondent, et les soldes d'arbitrage deviennent:

$$S_{C\&C} = S_{RCC} = F - U\,(1+ i\ d_1) + r\ U\,(1+ f\ d_{\tau l}) = F - U\,[1+ i\ d_1 - r\,(1+ f\ d_{\tau l})]$$

Une seconde hypothèse d'efficience des marchés à terme conduit à l'absence d'opportunité d'arbitrage sans risque et par conséquence au prix du contrat:

$$F = U\,[1+ i\ d_1 - r\,(1+ f\ d_{\tau l})]$$

La quantité $[i\ d_1 - r\,(1+ f\ d_{\tau l})]$ est couramment appelée *cost of carry* en s'inspirant de l'arbitrage qui procure son expression. Elle est souvent traduite en Français par ''coût de portage'' net.

Lorsque les cotations bid et ask diffèrent, l'hypothèse d'efficience conduit à l'encadrement suivant, où demeure le concept de coût de portage[6] :

$$U_b\,(1+ i_b\ d_1) - r_s\,U_b\,(1+ f_a\ d_{\tau l}) < F_b < F_a < U_a\,(1+ i_a\ d_1) - r_h\,U_a\,(1+ f_b\ d_{\tau l})$$

Les expressions obtenues relèvent de la famille des classiques Cost of Carry Models[7]. La prise en compte des fourchettes de marché rend ce type de modèle plus réaliste.

I.3.2 Critère d'appartenance

Notre modèle s'applique à un contrat forward ou future F lorsque les deux arbitrages purs peuvent être élaborés strictement, c'est-à-dire lorsqu'existe un sous-jacent U tel que les soldes de cash and carry et de reverse s'écrivent comme:

$$\begin{cases} S_{C\&C} = F_b - U_a\,(1+ i_a\ d_1) + r_h\,U_a\,(1+ f_b\ d_{\tau l}) \\ S_{RCC} = -F_a + U_b\,(1+ i_b\ d_1) - r_s\,U_b\,(1+ f_a\ d_{\tau l}) \end{cases}$$

Remarquons que ces soldes sont linéaires en F et U et qu'ils sont déterministes.

Le modèle s'applique particulièrement bien aux forwards sur action et sur obligation. Il est a priori moins propice aux futures sur indice action car ces derniers véhiculent un risque

---

[6] Gilles Desvilles, cf. infra note 1. L'établissement de l'inégalité proposée y est développé au chapitre 3.

d'exécution lié au délai de constitution des paniers indiciels; dans les faits, cette imperfection a presque disparu grâce à l'automatisation des ordres de paniers.

Le modèle semble en revanche mal adapté à des contrats traditionnellement arbitrés par des prêts-emprunts réels ou synthétiques, tels que les futures eurodollar ou les FRAs. L'objet principal de ce papier est de montrer que malgré les apparences ces contrats majeurs entrent dans notre cadre général moyennant des amendements bien identifiés.

II REGLEMENT CASH

Le règlement cash, dit encore en espèces, est une caractéristique des contrats forward de taux (FRAs) et des contrats future sur taux court interbancaire, alors que notre cadre général s'appuie sur un règlement par livraison de titres. Nous étudions dans cette partie l'impact de cette différence de fonctionnement.

L'attention est ici portée sur l'établissement du cours de liquidation.

II.1 Imperfection de règlement cash

II.1.1 Cash-and-carry (C&C)

Le règlement en espèces affecte les soldes de C&C et RCC au travers des actions et flux en T_1. En revanche les actions et flux sont inchangés en t et τ, aussi ne présentons-nous ici que le déroulement des arbitrages purs en T_1.

Il n'existe typiquement qu'un cours de liquidation commun aux deux types d'arbitrage, noté F_{liq}.

actions	flux
en T_1	
vend l'actif U porté jusque là	$U_b^{T_1}$
laisse expirer le contrat, règle l'appel de marge unique	$F_b - F_{liq}$
rembourse l'emprunt	$-U_a\,(1+ i_a\, d_1)$
récupère le placement des revenus	$r_h\, U_a\,(1+ f_b\, d_{\tau 1})$
solde de C&C en T_1	$S_1 = F_b - U_a\,(1+ i_a\, d_1) + r_h\, U_a\,(1+ f_b\, d_{\tau 1}) + (U_b^{T_1} - F_{liq})$

[7] ''Understanding futures markets'', pages 89 à 115, Robert W. Kolb, New York Institute of Finance, 3rd Edition.

Le solde de C&C ne diffère de son homologue du règlement par livraison que par le terme ($U_b^{T_1}$–F_{liq}), qui est l'écart entre le bid du sous-jacent à l'échéance et le cours de liquidation, et que nous intitulons **imperfection de règlement cash**.

II.1.2 Reverse (RCC)

actions	flux
en T_1	
achète l'actif U vendu jusque là à découvert	$-U_a^{T_1}$
restitue l'actif U au prêteur	0
laisse expirer le contrat, règle ou perçoit cash	$F_{liq}-F_a$
récupère le placement	$U_b\ (1+ i_b\ d_1)$
rembourse l'emprunt forward	$-r_s\ U_b\ (1+ f_a\ d_{\tau 1})$

solde de RCC en T_1 $\quad S_1 = -F_a + U_b\ (1+ i_b\ d_1) - r_s\ U_b\ (1+ f_a\ d_{\tau 1}) + (F_{liq}-U_a^{T_1})$

Le solde de RCC ne diffère de son homologue du règlement par livraison que par le terme (F_{liq}–$U_a^{T_1}$), qui est l'écart entre le cours de liquidation et le ask du sous-jacent à l'échéance, et qui est aussi l'**imperfection de règlement cash**, mais côté reverse.

Pour que les soldes de C&C et de RCC soient *déterministes*, il faudrait que les caractéristiques du contrat, fixées par les intervenants de gré-à-gré ou l'Echange, fixent un cours de liquidation des vendeurs égal à $U_b^{T_1}$, et un cours de liquidation des acheteurs égal à $U_a^{T_1}$. Cette règle susciterait vraisemblablement de nombreuses ''manipulations''— nous allons expliquer cette notion dans le développé suivant — de la fourchette du sous-jacent par les arbitragistes, et aboutirait à une situation indésirable.

A défaut, les opérateurs pourraient-ils tabler sur un fixing F_{liq} compris au sens large entre $U_b^{T_1}$ et $U_a^{T_1}$, qui leur permettrait d'encadrer les valeurs possibles de leurs soldes d'arbitrage désormais *aléatoires* ? Deux cas concrets montrent que la réponse est variable.

Les Cost of Carry Models sont amplement présentés.

II.2 Deux exemples

II.2.1 FRA

Nous accepterons ici l'idée que le sous-jacent du FRA est un taux. Nous verrons que le sous-jacent est en réalité un bon, et que les calculs sont plus complexes que ceux présentés ci-dessous (cf. V.2.1 Arbitrage classique du FRA et arbitrage équivalent en page 31). Cependant l'approximation par le taux n'altère pas le caractère illustratif du FRA.

L'exemple ci-dessous fait intervenir le taux interbancaire pibor qui a été totalement remplacé à partir du 4 janvier 1999 par l'euribor. Néanmoins les mécanismes décrits ont été conservés et il suffit de substituer euribor à pibor pour rendre actuel l'exemple.

Le taux de liquidation d'un FRA traditionnel est défini contractuellement comme le taux ask du sous-jacent à l'échéance. Rapporté à notre cadre général, l'instrument se caractérise donc par $F_{liq} = U_a^{T_1}$. L'exemple[8] suivant atteste du choix du ask à la liquidation, que le FRA soit acheté ou vendu, puisque le pibor est un taux offert:

> *Encart extrait de FRA, Société Générale*
>
> Les caractéristiques d'une opération de FRA sont les suivantes:
>
> - le montant de référence ''MR'' (soulignons qu'il s'agit d'un montant notionnel qui sert au calcul des flux d'intérêts, mais qui ne donne pas lieu à versement; dans le cas d'une opération de couverture, ce montant correspondra au volume à emprunter, ou prêter, à une date future);
> - le taux contractuel ''TC'' (taux garanti);
> - le taux du marché ''TM'' qui est l'index de référence choisi (par exemple, le pibor);
> - la période de référence (ou période de garantie, sur laquelle sont calculés les intérêts);
> - la date de règlement coïncide avec le jour ouvré où commence la période de référence; c'est le jour où est effectué le versement;
> - la date de liquidation se situe généralement deux jours ouvrés avant la date de règlement: c'est à cette date qu'on compare le taux du marché avec le taux contractuel;
> - le nombre de jours ''nbj'' de la période de référence;
> - le nombre de jours de la base annuelle ''B'' (360 pour des opérations en francs français)

---

[8] ''FRA'', Les cahiers des marchés obligataires, Société Générale, 1990.

… le versement effectué à la date de règlement est de:

$\frac{MRx(TC-TM)xnbj}{(100xB)+(TMxnbj)}$ si TM < TC (payé par l'acheteur de FRA au vendeur de FRA)

$\frac{MRx(TM-TC)xnbj}{(100xB)+(TMxnbj)}$ si TM > TC (payé par le vendeur de FRA à l'acheteur de FRA)

Notre cadre assimile date de règlement et date de liquidation; le décalage — dit J+2 — observé dans la réalité ne présenta pas d'intérêt théorique dans la mesure où toutes les opérations financières sont assorties de tels décalages, au paiement comme à réception des flux. En d'autres termes, les deux jours de décalage ne pénalisant ni n'avantageant le FRA et autres contrats, nous adoptons un décalage nul — J+0 — pour notre contrat générique F.

L'acheteur et le vendeur de FRA de l'encart sont respectivement les arbitragistes en RCC et C&C de nos propos. Pour une meilleure compréhension du rapprochement avec notre cadre incorporant des fourchettes de marché, citons un exemple chiffré:

Encart extrait de FRA, Société Générale

Supposons que le 19 avril 1990, le FRA 3/9 (six mois dans trois mois) est coté: 9.60-9.70.

Si (l'entreprise) achète le taux garanti (9.70%), elle recevra (ou versera) à l'échéance la différence entre le pibor et 9.70%.

En vendant un FRA au taux garanti de 9.60%, elle paiera (ou recevra) à l'échéance la différence entre le pibor et 9.60%.

Le chiffrage se répercute comme suit sur les arbitrages purs sur FRA:

RCC	Action sélectionnée	Flux
t:	Achat de FRA en à 9.70%	0
t + 3mois:	Règlement cash	$F_{liq}-F_a$ = pibor 6 mois – 9.70% = $U_a^{T_1}$ – 9.70%

C&C	Action sélectionnée	Flux
t:	Vente de FRA en à 9.60%	0
t + 3mois:	Règlement cash	$F_b - F_{liq}$ = 9.60% – pibor 6 mois = 9.60% – $U_a^{T_1}$

L'arbitragiste en RCC se retrouvant emprunteur à la date de règlement bénéficie d'une imperfection de règlement cash nulle — $F_{liq} - U_a^{T_1} = 0$ — . En revanche, en C&C, l'imperfection est égale à la largeur du bid-ask du comptant et vient en réduction du résultat d'arbitrage S_1 — $U_b^{T_1} - U_a^{T_1} < 0$ — .

Le pibor 6 mois est le cours de liquidation. Il est unique et relevé à 11h de chaque journée par l'AFB. Il est dans les faits utilisé en tant que pivot dans les négociations de tous les instants du marché monétaire, ce qui le rend complètement opérationnel et suffit à le qualifier de sous-jacent.

Que F_{liq} soit une *moyenne* des taux interbancaires cotés par 16 établissements de crédit de référence l'amène en théorie à pouvoir différer d'un taux $U_a^{T_1}$ négocié par un arbitragiste auprès de l'un de ces établissements. Mais dans la pratique, cet écart est nul car les établissements s'alignent sur un même niveau.

II.2.2 L'ex-future Pibor 3 mois

Des remarques similaires à celles émises au début du développé sur le FRA s'appliquent à cet instrument (cf. page 11).

Le contrat pibor lancé au printemps 1987 — les taux pibor au comptant de 1 à 12 mois ayant vu le jour en octobre 1986 — clôturait sur une valeur *unique*, à l'instar du contrat Cac 40, à 11h du jour de l'échéance.

Encart extrait de contrat à terme Pibor 3 mois, Matif, Avril 89

La liquidation

Il n'y a pas de livraison à l'échéance. Toute position non dénouée avant l'échéance donne lieu à une liquidation automatique entraînant le règlement de l'ultime appel de marge différence entre le cours de négociation du jour ou, à défaut, le cours de compensation de la veille et le cours de liquidation. Ce cours correspond à 100 moins le pibor 3 mois publié par l'AFB le jour de la liquidation à 11h, arrondi à deux décimales.

Le cours de liquidation pouvant être connu à partir de 11h15, les négociations sur l'échéance concernée cessent à 11h le jour de la clôture.

Ce taux de liquidation étant également sujet à manipulation, Matif SA a adopté une logique de moyenne au voisinage de l'échéance:

Encart extrait de contrat Pibor 3 mois, Matif, Avril 95

Liquidation

Le cours de liquidation du contrat à terme pibor 3 mois correspond à 100 moins la moyenne arrondie à deux décimales des taux pibor 3 mois comptants constatés le jour de la liquidation à 9h30, 11h00 et 12h30, cette dernière étant calculée par l'AFB.

La même remarque, au sujet de l'imperfection du règlement cash, que celle émise dans l'exemple du Cac 40 s'applique ici.

II.3 Conclusion

Sur le plan du formalisme, le règlement cash modifie peu les soldes d'arbitrage, puisqu'il suffit de leur adjoindre un terme additif d'imperfection particulièrement simple. Les résultats proposés en première partie sont valides pour les instruments impliquant un règlement cash à condition de garder à l'esprit que les opérations encourent un coût ou un risque supplémentaire. Ce que nous pouvons écrire de la manière suivante:

$$\begin{cases} S_{C\&C}^{CASH} = S_{C\&C}^{LIVR} - \text{coût ou risque de règlement cash en C\&C} \\ S_{RCC}^{CASH} = S_{RCC}^{LIVR} - \text{coût ou risque de règlement cash en RCC} \end{cases}$$

Dans la pratique, ce coût ou risque peut revêtir beaucoup d'importance de par sa possible amplitude au regard des soldes d'arbitrage pur, généralement faibles sur des marchés mûrs lorsque rapportés aux prix des actifs sous-jacents. Bien qu'estimer numériquement ce risque soit un objectif intéressant, il ne figure pas parmi ceux que nous nous sommes assignés dans ce papier.

III FUTURE SUR BON DU TRESOR

Les contrats majeurs sur taux court sont les FRAs, et les futures du type eurodollar 3 ou 1 mois — dont le contrat Matif pibor 3 mois fait partie —. Comme annoncé en préambule du FRA et du future pibor 3 mois figurant dans la partie précédente consacrée au règlement cash, le sous-jacent de ces contrats n'est pas le taux court lui-même.

Plus précisément, un taux court ne peut être le sous-jacent des deux opérations décrites en I.2 Arbitrage pur pour la simple raison que sur les marchés financiers, *acheter et vendre un taux d'intérêt ne se pratique pas*, bien que ce soit le taux et non le prix qui soit négocié dans toutes les transactions monétaires et obligataires.

A défaut, l'arbitragiste peut acheter ou vendre un bon portant sur le taux propre au contrat, ou prêter et emprunter à ce taux, ou encore contracter un swap taux fixe contre taux variable. C'est avec ces instruments qu'il réalisera ses cash and carry et reverse. Le sous-jacent U n'est pas i, mais un instrument de taux. Au moins trois sont éligibles — bons, prêts-emprunts, swaps — mais quel qu'il soit, la présentation qui va suivre leur est commune.

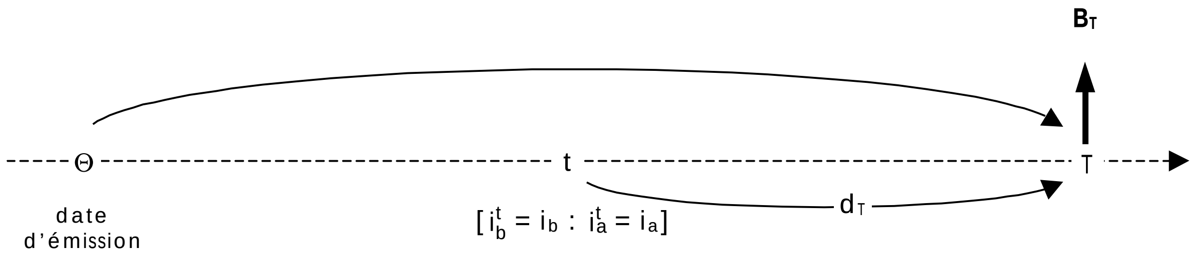
III.1 Bon générique

Un bon est classiquement l'instrument rapportant des intérêts calculés sur un taux fixe et une durée déterminée qui est aussi sa durée de vie. Il est d'abord émis par un gouvernement, une banque, une entreprise ou autre organisme, et la période de souscription constitue son marché primaire. Puis il se négocie sur le marché monétaire ou obligataire — intitulé pour l'occasion secondaire par opposition au marché primaire — .

Le prix du bon générique à une date quelconque t est noté $B_{t,T}(i^t)$, avec T date de maturité et i^t taux pertinent du marché. Un taux bid i^t_b donne un prix d'achat $B(i^t_b)$, un taux ask i^t_a un prix de vente $B(i^t_a)$. Cette relation classique suffira et définir une fourchette $[B_b : B_a]$ ne sera pas nécessaire.

Le bon générique est du type zéro-coupon, à savoir que les intérêts portés sont versés en une seule fois, à la maturité et avec le remboursement du capital souscrit. La somme du capital et des intérêts est donc la valeur finale du bon, soit $B_{T,T}(i^T)$, indépendante de i^T et notée brièvement B_T.

Il n'est pas question d'imposer une ou plusieurs formes strictes à ce bon, comme le font les marchés de taux. Peu importe à la théorie de la finance moderne comment le capital et les intérêts sont présentés. Seule lui suffit l'actualisation des flux futurs.



En t, le bon se règle donc aux prix: $\left[B(i_a) = \frac{B_T}{1+i_a d_T} : B(i_b) = \frac{B_T}{1+i_b d_T}\right]$, établis avec des taux pertinents, c'est-à-dire *négociés pour le bon en question*.

III.2 <u>Future sur bon du Trésor</u>

Le 3-months T-Bill future est florissant aux USA depuis son lancement en janvier 1976 par le CME, alors que l'équivalent français, lancé par Matif SA en juin 1986, s'est éteint au bout de deux ans. La raison première de cet échec fut certainement l'absence de marché secondaire du sous-jacent, le bon du Trésor français[9].

Le future F porte sur un Treasury bill B dont la date de maturité excède de trois mois date-à-date sa propre échéance. Le règlement s'effectue par livraison des titres.

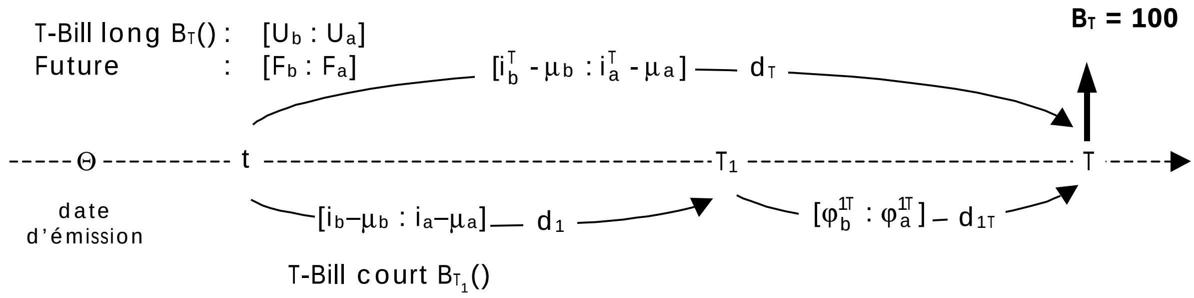
Un bon détache bien un revenu R sous forme d'intérêts, mais ce revenu étant versé en T postérieur à T_1, R_s et R_h sont nuls dans les soldes d'arbitrage.

Enfin, les T-Bills étant émis par le gouvernement américain et les arbitragistes travaillant typiquement pour des banques privées ou assimilées, leurs taux sont distincts. Ils respectent une hiérarchie liée au risque de l'un et l'autre. Le gouvernement étant plus sûr que les tables d'arbitrage et leurs maisons mères, à maturité égale le taux bid d'un T-Bill est inférieur au taux de prêt de l'arbitragiste, le taux ask inférieur au taux d'emprunt.

Notant μ_b et μ_a les marges les séparant, et i_b et i_a les taux de prêt-emprunt de l'arbitragiste, deux T-Bills sont décrits par le schéma suivant:

---

[9] Lire à ce sujet ''Contrat bon du Trésor ou contrat pibor ?'', Edouard Macko et Philippe Cahen, p 429-436, La Revue Banque, Avril 1988.



Pour un US T-Bill, d_{1T} = 3 mois

R est identique pour le détenteur et le vendeur à découvert du bon. Bien que cela n'ait aucune importance de fond, nous posons $B_T = P_\Theta + R = 100$ avec P_Θ prix à l'émission, par simplicité de forme qui s'avère aussi conforme à la réalité des T-Bills.

A la date t, le prix $[U_b : U_a]$ d'un T-Bill payant 100 en T est $\left[\frac{100}{1+(i_a^T-\mu_a)d_T} : \frac{100}{1+(i_b^T-\mu_b)d_T}\right]$.

Les marchés négocient les T-Bills à l'aide de taux d'escompte[10] — discount yields — , mais parce qu'il existe une relation univoque entre les taux d'escompte et $(i_b^T - \mu_b, i_a^T - \mu_a)$, ces derniers sont pertinents dès lors que la relation est actualisée.

D'autre part, les taux <u>forward</u> de la courbe des bons du Trésor, $(\varphi_b^{1T}, \varphi_a^{1T})$, se déduisent classiquement des taux spot[11]:

$$1+\varphi_b^{1T} d_{1T} = \frac{1+(i_b^T-\mu_b)d_T}{1+(i_a-\mu_a)d_1} \qquad \text{et} \qquad 1+\varphi_a^{1T} d_{1T} = \frac{1+(i_a^T-\mu_a)d_T}{1+(i_b-\mu_b)d_1}$$

$(\varphi_b^{1T}, \varphi_a^{1T})$ sont entièrement déterminés à la date t, et nullement aléatoires en T_1.

En posant $U_b = \frac{100}{1+(i_a^T-\mu_a)d_T}$ et $U_a = \frac{100}{1+(i_b^T-\mu_b)d_T}$, et $r_s = r_h = 0$, les soldes d'arbitrage pur en T_1,

$$S_{C\&C} = F_b - U_a\,(1+ i_a d_1) + r_h U_a\,(1+ f_b d_{\tau l}) \qquad \text{et} \qquad S_{RCC} = -F_a + U_b\,(1+ i_b d_1) - r_s U_b\,(1+ f_a d_{\tau l})$$

, deviennent:

$$\begin{cases} S_{C\&C} = F_b - \dfrac{100}{1+(i_b^T-\mu_b)d_T}\,(1+i_a d_1) = F_b - \dfrac{100}{1+\varphi_b^{1T} d_{1T}}\,\dfrac{1+i_a d_1}{1+(i_a-\mu_a)d_1} \\[2ex] S_{RCC} = -F_a + \dfrac{100}{1+(i_a^T-\mu_a)d_T}\,(1+i_b d_1) = -\left(F_a - \dfrac{100}{1+\varphi_a^{1T} d_{1T}}\,\dfrac{1+i_b d_1}{1+(i_b-\mu_b)d_1}\right) \end{cases}$$

---

[10] Prix = 100 (1–taux d'escompte x durée)

[11] Pour établir le bid, considérer un investisseur voulant placer un flux en T_1, qui emprunte court et reprête long. Considérer l'inverse pour établir le ask.

Ces soldes sont déterministes à la date t.

Nous savions par avance que le T-Bill future s'inscrit parfaitement dans notre cadre général, mais cette analyse prépare l'intégration dans ce même cadre du contrat eurodollar n-mois, sensé a priori ne pas porter sur un actif mais sur un taux.

III.3 Taux implicite du future contre taux forward du comptant

Le CME a décidé de coter le T-Bill future selon une cotation similaire à celle des T-Bills, à savoir: IMM Index = 100 (1 – ''discount yield'').

Notons ¶ le *pseudo*-discount yield (ou taux d'escompte) **implicite** à l'indice IMM.

Ainsi $IMM_b = 100(1 - \partial_a)$ et $IMM_b = 100(1 - \partial_b)$.

Le CME a également établi la règle de livraison suivante[12]:

$$\begin{cases} \text{Prix du T-Bill livré après vente d'un future} = 100\,(1 - \partial_a\, d_{1T}) \\ \text{Prix du T-Bill reçu après achat d'un future} = 100\,(1 - \partial_b\, d_{1T}) \end{cases}$$

Ainsi le future <u>effectif</u> F n'est pas exactement l'indice IMM coté et négocié, mais 100 (1 – discount yield x d_{1T}).

D'où:

$$\begin{cases} F_b = 100\,(1 - \partial_a\, d_{1T}) \\ F_a = 100\,(1 - \partial_b\, d_{1T}) \end{cases}$$

Ce qui donne des valeurs approximatives — en développant en séries de Taylor les fractions et négligeant les termes du second degré et la marge μ — pour les soldes d'arbitrage:

$$\begin{cases} S_{C\&C} = 100\,(1 - \partial_a\, d_{1T}) - \dfrac{100}{1+\varphi_b^{1T} d_{1T}} \dfrac{1+i_a d_1}{1+(i_a - \mu_a) d_1} \approx 100\,(\varphi_b^{1T} - \partial_a)\, d_{1T} \\ S_{RCC} = -\left(100\,(1 - \partial_b\, d_{1T}) - \dfrac{100}{1+\varphi_a^{1T} d_{1T}} \dfrac{1+i_b d_1}{1+(i_b - \mu_b) d_1} \right) \approx 100\,(\partial_b - \varphi_a^{1T})\, d_{1T} \end{cases}$$

[12] En réalité, ce n'est pas d_{1T} qui figure mais une durée *standard* proche de n ou 3 mois exacts, sans toutefois leur être nécessairement égale. L'écart entre les deux durées génère un risque analysé en ''Contrat pibor: taux à terme et tension monétaire'', Gilles Desvilles, Banque et Marchés, Mars-Avril 1997. sous l'appellation. Nous l'omettons dans ce qui suit.

En première approche, l'arbitragiste compare donc le taux implicite ∂ du future au taux φ forward 3 mois en T_1 des T-Bills:

$$\begin{cases} \varphi_b^{1T} > \partial_a & \Rightarrow \quad \text{initiation d'un C\&C} \\ \partial_b > \varphi_a^{1T} & \Rightarrow \quad \text{initiation d'un RCC} \\ \partial_a > \varphi_a^{1T} > \varphi_b^{1T} > \partial_b & \Rightarrow \quad \text{pas d'initiation d'arbitrage} \end{cases}$$

IV FUTURE DE TYPE EURODOLLAR N-MOIS

IV.1 Future sur certificat de dépôt

Le CD future porte sur l'équivalent bancaire du bon du Trésor, à savoir un Certificate of Deposit ou Certificat de Dépôt. Ce future, qui a existé sur le CME de juillet 1981 à fin 1987[13], porte sur des CDs domestiques émis par des banques de premier nom. Il implique un règlement par livraison de titres émis par un panel établi par le CME. Le vendeur de future bénéficie d'une *wild card* — option sur la date de livraison comprise dans les 15 derniers jours précédant l'échéance — , caractéristique que nous ignorerons ici.

L'étude précédente est valide à condition qu'il existe un fort volume sur le marché secondaire des CDs — ce qui est le cas aux USA, mais beaucoup moins en France — et d'adopter des marges μ nulles — l'arbitragiste étant représentatif de sa communauté professionnelle — . D'où les nouveaux soldes d'arbitrage sur le CD future ($\mu = 0$):

$$\begin{cases} S_{C\&C} = \quad F_b - \dfrac{100}{1+f_b^{1T} d_{1T}} \\ S_{RCC} = -\left(F_a - \dfrac{100}{1+f_a^{1T} d_{1T}} \right) \end{cases}$$

(f_b^{1T}, f_a^{1T}) sont les taux <u>forward</u> issus de la courbe interbancaire par les identités:

$$1+f_b^{1T}\, d_{1T} \equiv \frac{1+i_b^T d_T}{1+i_a d_1} \qquad \text{et} \qquad 1+f_a^{1T}\, d_{1T} \equiv \frac{1+i_a^T d_T}{1+i_b d_1}$$

---

[13] Le CD future du CME a disparu parce que son champ d'utilisation s'est avéré redondant vis-à-vis de celui du future eurodollar.

IV.2 Sous-jacent implicite

IV.2.1 Présentation

Le CME, le LIFFE et quelques autres Echanges — dont le MATIF pour le contrat pibor — ont adopté également une cotation en discount yield de leurs futures eurodevises n mois.

Restant sur le CME, le cours du future se traite comme l'IMM Index = 100 (1 – ∂). Le n-month eurodollar future, comme dit dans l'encart de II.2.2 L'ex-future Pibor 3 mois en page 13, clôture son échéance à

$$IMM_{liq} \equiv 100\ (1 - \text{taux } \textit{officiellement} \text{ offert sur l'interbancaire n mois en dollar})$$

, où le taux est celui négocié à Londres, c'est-à-dire le libor. Le règlement est cash. Afin d'isoler chaque déviation vis-à-vis de notre cadre général, nous supposons le taux de liquidation établi à 11h GMT précise et représentatif des échanges bancaires, parmi lesquels figurent les prêts-emprunts des arbitragistes. Aucune moyenne officielle n'intervient, aucune manipulation de la référence n'est à craindre. D'où:

$$IMM_{liq} = 100(1 - lib^{1T}_{1,a}) \qquad \text{avec } lib^{1T}_{1,a} \text{ libor n-mois diffusé en } T_1.$$

Le libor diffusé par l'association des banques à Londres est un chiffre officiel, qui ressort toujours avec une *marge* au dessus du taux d'emprunt opérationnel.

Cette marge et le taux ask opérationnel sont notés respectivement μ_{off} et $i^{1T}_{1,a}$. D'où:

$$lib^{1T}_{1,a} = i^{1T}_{1,a} + \mu_{off}$$

La règle de liquidation édictée par les Echanges et adaptée à notre hypothèse d'appel de marge terminal est:

$$\begin{cases} \text{règlement cash après vente du future} = (IMM_b - IMM_{liq})\,\dfrac{\text{n mois}}{\text{1an}} \\ \text{règlement cash après achat du future} = (IMM_{liq} - IMM_a)\,\dfrac{\text{n mois}}{\text{1an}} \end{cases}$$

$$\text{Le } \textbf{future effectif} \text{ est donc } F = 100\left(1 - \partial\ \frac{\text{n mois}}{\text{1an}}\right)$$

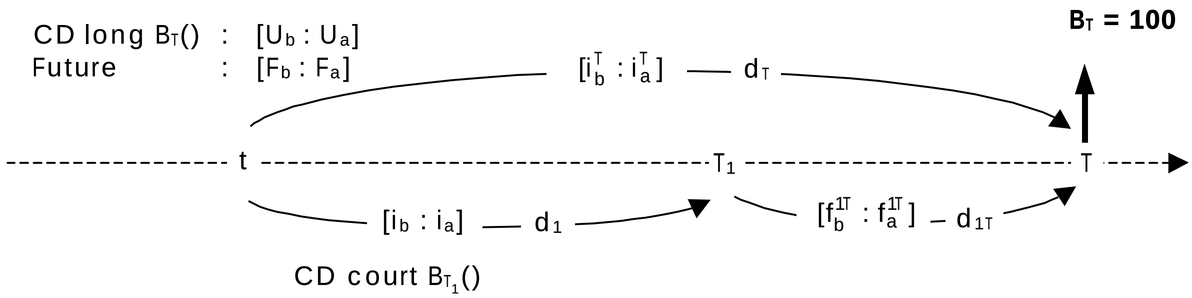
Pour simplifier la présentation qui suit, nous supposons enfin que $d_{1T} = \dfrac{\text{n mois}}{\text{1an}}$ [14].

[14] Même remarque qu'en note 12.

IV.2.2 Arbitrage future eurodollar contre euro-CD

Supposons que l'arbitragiste *estime* que le future eurodollar n-mois porte sur un *euro-CD* de maturité T dépassant de n mois sa propre échéance T_1, et rapportant 100 en T [15].

Voici le marché qu'il observe en date t:



Le CD est interprété ici comme un bon interbancaire.

Nous développons d'abord ses résultats d'opération avant de vérifier la validité de son estimation.

Cash and carry

L'arbitragiste démarre en t un cash and carry exactement comme décrit page 4, mais en posant $U_a = B_T(i_b) = 100/(1+i_b d_T)$ et $r_h = 0$. En τ aucune intervention n'est nécessaire. En T_1, les actions et flux se départissent du cadre général comme suit:

actions	flux
en T_1	
vend le CD porté jusque là	$U_b^{T_1} = \frac{100}{1+i^{1T}_{1,a} d_{1T}}$
laisse expirer le contrat, règle ou perçoit cash	$[F_b - 100(1-(i^{1T}_{1,a}+\mu_{off})d_{1T})]$
rembourse l'emprunt	$-\frac{100}{1+i_b^T d_T}(1+i_a d_1)$
solde de C&C en T_1	$S^1_{C\&C} = F_b - \frac{100}{1+i_b^T d_T}(1+i_a d_1) + \left(\frac{100}{1+i^{1T}_{1,a} d_{1T}} - 100(1-i^{1T}_{1,a} d_{1T})\right) + 100\mu_{off} d_{1T}$

[15] Dans la réalité, les CDs payent 100(1 + r), et l'arbitragiste doit en tenir compte dans le calcul de son hedge ratio. Nous n'entrons pas plus dans ces détails, qui ne constituent un risque que pour les opérations de petite taille.

Avec l'introduction du taux forward f interbancaire à 3 mois départ T_1 date d'échéance du contrat, le solde s'écrit:

$$S^1_{C\&C} = F_b - \frac{100}{1+f^{1T}_b d_{1T}} + \left(\frac{100}{1+i^{1T}_{1,a} d_{1T}} - 100(1-i^{1T}_{1,a}\, d_{1T})\right)$$

Reverse cash and carry

L'arbitragiste démarre en t un reverse cash and carry exactement comme décrit page 7, mais en posant $U_b = B_T(i_a) = 100/(1+i_a d_T)$ et $r_s = 0$. En τ aucune intervention n'est nécessaire. En T_1, les actions et flux se départissent du cadre général comme suit:

actions	flux
en T_1	
achète le CD jusque là vendu à découvert	$-U^{T_1}_a = -\dfrac{100}{1+i^{1T}_{1,b} d_{1T}}$
restitue le CD au prêteur	0
laisse expirer le contrat, règle ou perçoit cash	$[100\left(1-(i^{1T}_{1,a}+\mu_{off})d_{1T}\right) - F_a]$
récupère le placement	$\dfrac{100}{1+i^T_a d_T}(1+i_b d_1)$

solde de RCC en T_1 $\quad S^1_{RCC} = -F_a + \dfrac{100}{1+i^T_a d_T}(1+i_b d_1) - \left(\dfrac{100}{1+i^{1T}_{1,b} d_{1T}} - 100(1-i^{1T}_{1,a}\, d_{1T})\right) - 100\mu_{off} d_{1T}$

Avec l'introduction du taux forward f interbancaire à 3 mois départ T_1 date d'échéance du contrat, le solde s'écrit:

$$\begin{aligned} S^1_{RCC} &= -\left(F_a - \frac{100}{1+f^{1T}_a d_{1T}}\right) - \left(\frac{100}{1+i^{1T}_{1,b} d_{1T}} - 100(1-i^{1T}_{1,a}\, d_{1T})\right) - 100\mu_{off} d_{1T} \\ &= -\left(F_a - \frac{100}{1+f^{1T}_a d_{1T}}\right) - \left(\frac{100}{1+i^{1T}_{1,b} d_{1T}} - 100(1-i^{1T}_{1,b}\, d_{1T})\right) - 100\, spd_1(i)\, d_{1T} - 100\, \mu_{off}\, d_{1T} \end{aligned}$$

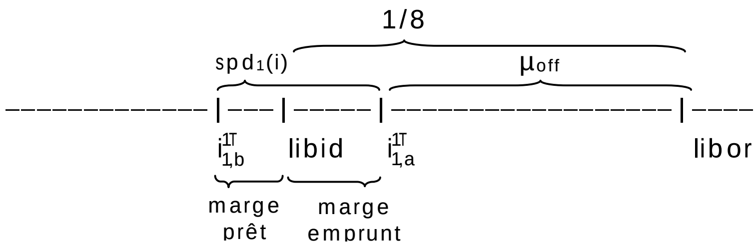
avec $spd_1(i) = i^{1T}_{1,a} - i^{1T}_{1,b}$ = bid-ask spread en T_1 du taux interbancaire 3 mois traité à Londres.

$i^{1T}_{1,b}$ est communément appelé, dans le jargon financier, ''libid 3 mois moins marge''.

IV.2.3 Le traditionnel 1/8

Nous avons introduit le libor *officiel* $lib^{1T}_{1,a}$ et son pendant *opérationnel* $i^{1T}_{1,a}$, et appelé μ_{off} la marge qui les sépare ($\mu_{off} = lib^{1T}_{1,a} - i^{1T}_{1,a}$); nous venons de présenter le bid interbancaire opérationnel $i^{1T}_{1,b}$ et nommer $spd_1(i)$ le spread $i^{1T}_{1,a} - i^{1T}_{1,b}$. Mais la marge de 1/8 entre les libor et libid officiels n'est pas mentionnée; or elle est universellement connue. Comment l'intégrer dans notre description ?

Le schéma suivant fournit une réponse.



La marge de 1/8 est l'écart entre les libid et libor, sous-entendus officiels. Le libor est au cœur du future, mais c'est le libid qui est utilisé comme taux de référence dans les transactions monétaires, qu'elles concernent des placements ou des emprunts.

Nous avons l'identité suivante: $1/8 = \mu_{off} +$ marge emprunteuse

A Paris, il est courant que la marge emprunteuse par rapport au pibid soit nulle, auquel cas $\mu_{off} = 1/8$. Mais cette égalité n'est pas systématique; il suffit que la signature de l'emprunteur soit de mauvaise qualité pour que s'intercale une marge.

IV.3 Imperfection de linéarisation

Les soldes d'arbitrage font apparaître le solde d'arbitrage sur un euro-CD future et un terme mesurant l'écart entre une actualisation en taux simple et une valorisation en taux d'escompte. Le solde de reverse contient en outre l'incidence du spread libor-libid, qui n'est autre que l'imperfection du règlement cash étudié dans la partie précédente.

IV.3.1 Définition

Nous dénommons **imperfection de linéarisation**[16] l'écart entre l'actualisation et la cotation en taux d'escompte.

[16] ''Linéarisation'' ne figure pas dans le vocabulaire français officiel et nous nous excusons de l'employer malgré cela, pour raison de commodité, au lieu de ''approximation linéaire''.

$$\left\{\begin{array}{l}
S^{1}_{C\&C} = \overbrace{F_b - \frac{100}{1+f_b^{1T} d_{1T}}}^{\text{solde C\&C sur un euro-CD future}} + \overbrace{\left(\frac{100}{1+i_{1,a}^{1T} d_{1T}} - 100(1-i_{1,a}^{1T} d_{1T})\right)}^{\text{imperfection de linéarisation}} + \overbrace{100\ \mu_{off}\ d_{1T}}^{\text{imperfection du règlement cash}} \\
S^{1}_{RCC} = \underbrace{-\left(F_a - \frac{100}{1+f_a^{1T} d_{1T}}\right)}_{\text{solde RCC sur un euro-CD future}} - \underbrace{\left(\frac{100}{1+i_{1,b}^{1T} d_{1T}} - 100(1-i_{1,b}^{1T} d_{1T})\right)}_{\text{imperfection de linéarisation}} - \underbrace{100\ (spd_1(i)+\mu_{off})\, d_{1T}}_{\text{imperfection du règlement cash}}
\end{array}\right.$$

IV.3.2 Mise en évidence

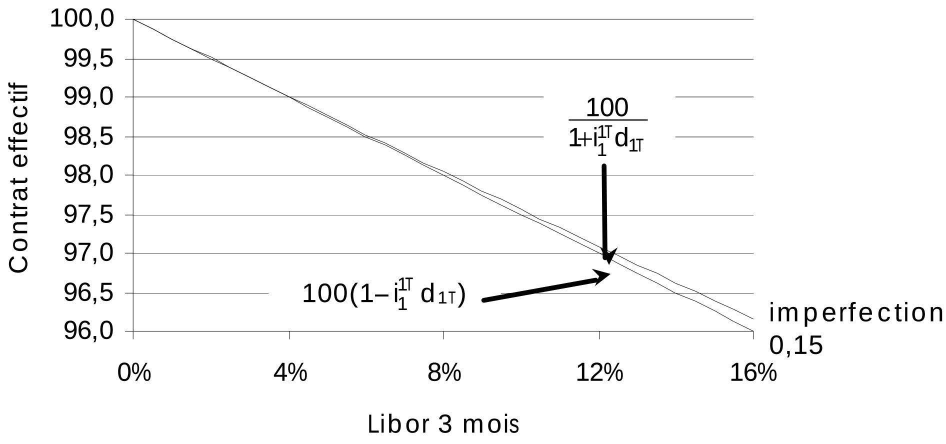
Dans ''imperfection de linéarisation'', il est sous-entendu que si les Echanges ne s'étaient fiés qu'à la théorie financière, ils auraient opté pour une cotation en valeur actuelle; concrètement ils ont sacrifié à une présentation dominante sur les marchés des sous-jacents concernés et préexistant aux futures. Néanmoins sur ces marchés, la cotation en taux d'escompte n'est que pure forme, héritée d'un lointain passé (les T-Bills ont débuté en 1929) soucieux d'une simplicité de départ — or quoi de plus simple que la forme linéaire 100% – taux d'intérêt x durée — ? La majorité des professionnels et la quasi-totalité des progiciels *convertissent* aujourd'hui ce taux en un taux simple et, surtout, en un taux actuariel via des formules figurant dans tous les manuels de base. Il est possible ensuite de comparer la rentabilité de l'instrument négocié en taux d'escompte avec celles de produits négociés différemment, comme les certificats de dépôt, les obligations, les actions (rentabilités espérées en dividendes et en capital), et plus généralement tout type d'investissement.

Cette conversion met en relief que la linéarisation ne sied pas à l'évaluation moderne des actifs. Pour tout financier actuel, théoricien ou praticien, s'il est vrai que 100 placé au taux $i = i_b = i_a$ rapporte 100(1+i) dans un an, il est faux que 100 dans un an soit équivalent à 100(1–i) aujourd'hui.

La simplicité de cotation occasionne une gêne pour l'arbitragiste, qui est la nécessité d'incorporer dans ses calculs le prix de l'imperfection de linéarisation, comme cela et fait dans les deux soldes précédents mis en accolades. La décomposition de ces soldes relève d'ailleurs de la conversion, commune à tous les intervenants, qui vient d'être évoquée.

Une simple simulation sur le future eurodollar 3 mois montre que l'imperfection de linéarisation est faible par rapport au nominal 100 du CD, même pour des taux libid ou libor i^{1T} élevés (+0.15 pour 16%).

Imperfection de linéarisation du future eurodollar 3 mois



Néanmoins l'arbitragiste ne peut décréter sur ce seul graphique que l'imperfection est négligeable. En effet, il doit la comparer au solde d'arbitrage sur euro-CD future $\pm(F - 100/(1+f^{1T} d_{1T}))$ qui, sur un marché très suivi par ses confrères, est vraisemblablement également faible lorsqu'il est positif (opportunité d'arbitrage).

IV.3.3 Conclusion

Notons $100\lambda_1(i)$ l'imperfection de linéarisation, que nous supposerons identique[17] pour le cash and carry et le reverse, et qui donc dépend du seul libor n-mois en T_1:

$$100\lambda_1(i_{1,a}^{1T}) = \frac{100}{1+i_{1,a}^{1T} d_{1T}} - 100(1-i_{1,a}^{1T} d_{1T}) \approx 100\lambda_1(i_{1,b}^{1T}) = \frac{100}{1+i_{1,b}^{1T} d_{1T}} - 100(1-i_{1,b}^{1T} d_{1T})$$

$$\lambda_1(i) \equiv \lambda_1(i_{1,a}^{1T}) = \lambda_1(i_{1,b}^{1T})$$

Les soldes s'écrivent maintenant de façon plus concise:

$$\begin{cases} S_{C\&C}^{1} = F_b - \dfrac{100}{1+f_b^{1T} d_{1T}} + 100\lambda_1(i) + 100\,\mu_{off}\, d_{1T} \\ S_{RCC}^{1} = -(F_a - \dfrac{100}{1+f_a^{1T} d_{1T}}) - 100\lambda_1(i) - 100\,(spd_1(i)+\mu_{off})\, d_{1T\ T} \end{cases}$$

[17] Il faut un spread libor-libid irréaliste pour devoir distinguer deux imperfections ($\lambda_{C\&C}$ et λ_{RCC}).

L’arbitragiste sur le future eurodollar n-mois échéance T_1 peut donc considérer que le contrat porte sur un euro-certificat de dépôt de maturité T_1+n-mois à condition d’incorporer dans ses comptes, dès l’initialisation de son arbitrage, l’imperfection l due à la linéarité de la cotation du future et l’imperfection spd du règlement cash.

IV.4 Remarques

IV.4.1 Taux implicite du future contre taux forward du comptant

Dans la pratique, les arbitragistes traitent le contrat eurodollar sans se soucier de l’imperfection de linéarisation λ. De plus, en première approche, ils comparent son taux implicite ∂ au taux forward f n-mois départ T_1 de la courbe des CDs.

Heureusement pour eux, les deux approximations ne se cumulent pas mais au contraire se compensent fort bien.

Compensation

En effet, lorsque sont rapprochés l’expression du contrat effectif page 20 et les soldes d’arbitrage page 24:

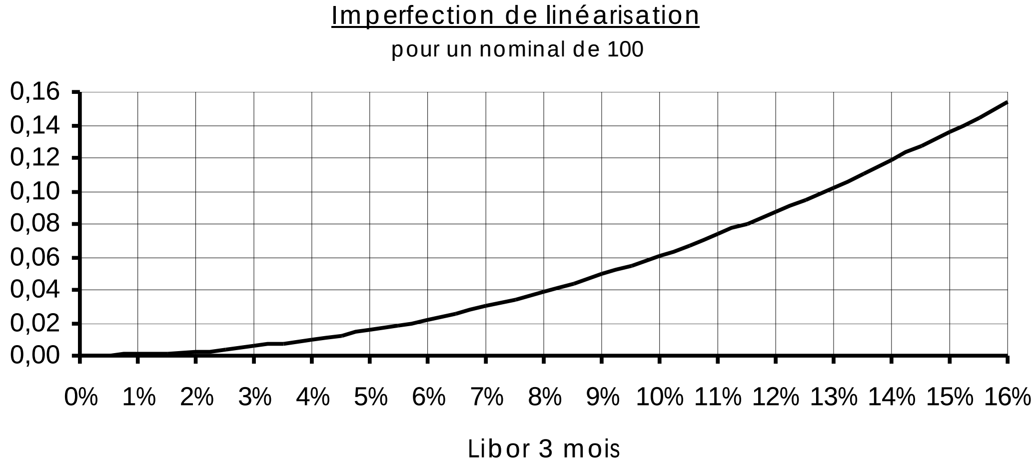
$$\begin{cases} F_b = 100\,(1 - \partial_a\ d_{1T}) \\ F_a = 100\,(1 - \partial_b\ d_{1T}) \\ S^1_{C\&C} = F_b - \dfrac{100}{1+f_b^{1T} d_{1T}} + \left(\dfrac{100}{1+i_{1,a}^{1T} d_{1T}} - 100(1-i_{1,a}^{1T}\, d_{1T})\right) + 100\ \mu_{off}\ d_{1T} \\ S^1_{RCC} = -\left(F_a - \dfrac{100}{1+f_a^{1T} d_{1T}}\right) - \left(\dfrac{100}{1+i_{1,b}^{1T} d_{1T}} - 100(1-i_{1,b}^{1T}\, d_{1T})\right) - 100\ (spd_1(i)+\mu_{off})\, d_{1T} \end{cases}$$

le phénomène de compensation est manifeste:

$$\begin{cases} S^1_{C\&C} = -\overbrace{\left(\dfrac{100}{1+f_b^{1T} d_{1T}} - 100(1-f_b^{1T}\, d_{1T})\right) + \left(\dfrac{100}{1+i_{1,a}^{1T} d_{1T}} - 100(1-i_{1,a}^{1T}\, d_{1T})\right)}^{\text{compensation de deux écarts } \Delta\lambda_{C\&C}:\ -\lambda_t(f_b^{1T}) + \lambda_1(i_{1,a}^{1T})} + 100(f_b^{1T} - \partial_a)\, d_{1T} + 100\ \mu_{off}\ d_{1T} \\ S^1_{RCC} = \underbrace{\left(\dfrac{100}{1+f_a^{1T} d_{1T}} - 100(1-f_a^{1T}\, d_{1T})\right) - \left(\dfrac{100}{1+i_{1,b}^{1T} d_{1T}} - 100(1-i_{1,b}^{1T}\, d_{1T})\right)}_{\text{compensation de deux écarts } \Delta\lambda_{RCC}:\ \lambda_t(f_a^{1T}) - \lambda_1(i_{1,b}^{1T})} + 100(\partial_b - f_a^{1T})\, d_{1T} - 100\ (spd_1(i)+\mu_{off})\ d_{1T} \end{cases}$$

Plus le taux forward [f_b^{1T} : f_a^{1T}] est proche du spot constaté en T_1 [$i_{1,b}^{1T}$: $i_{1,a}^{1T}$], plus la compensation $\Delta\lambda$ est efficace.

Si taux forward à l'origine et spot à l'échéance divergent sensiblement, la compensation est partielle. Le graphique suivant aide à percevoir l'ordre de grandeur de la résultante:



Par exemple, en C&C, si $i_{1,a}^{1T}$ est supérieur de 1% à f_b^{1T}, alors la résultante $\Delta\lambda_{C\&C}$ démarre de 0 pour un niveau de taux presque nul pour atteindre environ 0,02 ($i_{1,a}^{1T}$ = 0,155, f_b^{1T} = 0,135) pour un niveau proche de 16%.

Conclusion

Ainsi, si la fluctuation et le niveau de taux autorisent à considérer la compensation comme totale — un cas de figure réaliste — , les soldes d'arbitrage se réduisent à:

$$\begin{cases} S^1_{C\&C} = +\,100\,(f_b^{1T} - \partial_a)\,d_{1T} \quad + \quad 100\,\mu_{off}\,d_{1T} \\ S^1_{RCC} = +\,100\,(\partial_b - f_a^{1T})\,d_{1T} \quad - \quad 100\,(spd_1(i)+\mu_{off})\,d_{1T} \end{cases}$$

Avec:

$$\text{------------}\underbrace{|\text{---}|\text{-----}|}_{spd_1(i)}\overbrace{\text{-----------------}|}^{\mu_{off}}\text{----}$$

$i_{1,b}^{1T}$ libid $i_{1,a}^{1T}$ libor

Le praticien de l'arbitrage a donc souvent raison de se focaliser sur le spread taux d'escompte implicite-taux forward.

Ce constat est valide à condition de comptabiliser l'imprécision du règlement cash 100 $spd_1(i)d_{1T}$.

IV.4.2 Risques de l'arbitrage sur le future eurodollar

Imperfection de linéarisation

Le cash and carry et le reverse sur le contrat eurodollar ne sont pas des arbitrages purs *stricto sensu* puisque leurs soldes page 25, contenant $\lambda_1(i_{1,b}^{1T})$ et $\lambda_1(i_{1,a}^{1T})$ [18] avec $i_{1,b}^{1T}$ et $i_{1,a}^{1T}$ variables connues seulement à l'échéance T_1, sont aléatoires en date t.

L'imprécision de linéarisation est donc aléatoire. Si en t l'arbitragiste l'anticipe comme valant $E(\lambda_1)$ en T_1, et qu'elle ressort à λ_1, le risque est $\lambda_1 - E(\lambda_1)$. Ce risque est incontournable, quels que soient les instruments engagés dans l'arbitrage, prêt-emprunt ou swaps.

Imperfection de règlement cash

Pareillement, l'imprécision de règlement cash est porteuse d'un risque inamovible, qui réside dans les possibles fluctuations du bid-ask interbancaire à Londres. Ces fluctuations sont rares, la marge officielle μ_{off} et le bid-ask spread de taux interbancaire étant presque tout le temps étales — à Paris, pibid $\approx \frac{1}{2}(i_{1,b}^{1T} + i_{1,a}^{1T})$, pibor – pibid = 0.125% (1/8), et $i_{1,a}^{1T} - i_{1,b}^{1T} \approx$ 0.04% (4bp) — ; elles surgissent lors de crises de change dépréciant certaines eurodevises à vocation de stabilité relative, à la suite de vagues d'emprunts à libor en ces devises alors que les prêts à libid deviennent inexistants. Les taux du dollar n'étant de fait jamais touchés par un tel phénomène, il est préférable de dire que le risque de spread libor-libid s'applique aux arbitrages sur futures *eurodevises*.

D'après notre formalisation, le risque de spread interbancaire n'affecte que le reverse cash and carry [19]. Il s'écrit $-100\big(spd_1(i) - E[spd_1(i)]\big)d_{1T}$.

Le risque de marge officielle est à notre connaissance insignifiant.

---

[18] $\lambda_1(i_{1,b}^{1T}) \approx \lambda_1(i_{1,a}^{1T}) \equiv \lambda_1(i)$.

[19] Ce risque est signalé dans ''Quelle prime pour le strip pibor ?'', page 2, Gilles Desvilles, Libre Echange, Matif SA, Juin 1995.

V FRA

Le FRA est un contrat forward qui présente la particularité d'actualiser, au taux de référence, l'échange de taux courts ayant lieu à l'échéance. L'encart page 11 met en évidence le mécanisme: $\frac{MRx(TC-TM)xnbj}{(100xB)+(TMxnbj)}$ est l'échange TC–TM, prorata temporis, divisé par (1+TM x durée).

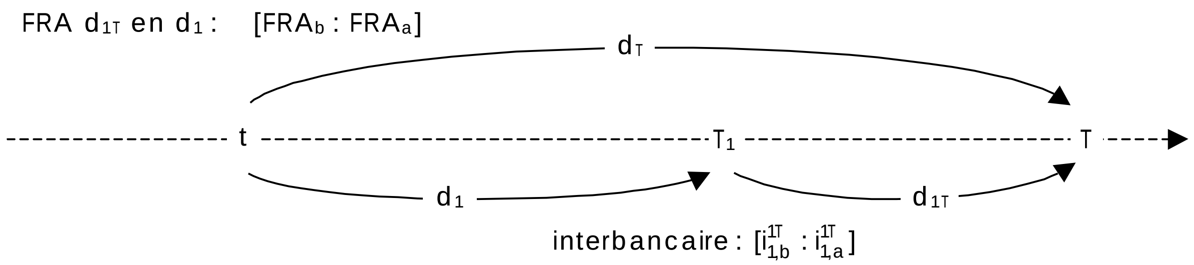
Cette actualisation, rencontrée à notre connaissance sur aucun autre contrat, provient de la vocation du FRA à être un produit spécialisé à l'intention des utilisateurs naturels que sont les entreprises, dont les besoins sont majoritairement emprunteurs.

Nous allons voir que le FRA tend effectivement vers l'instrument sur-mesure pour un emprunteur, mais que sa caractéristique d'actualisation du règlement rend délicate son intégration dans notre cadre général.

V.1 Du presque sur-mesure pour un emprunteur

En t, un trésorier sait qu'il doit emprunter 100 en T_1 et sur l'horizon T, et craint une hausse des taux. Il achète un FRA (d_1/d_{1T}) au taux FRA_a. Le taux de référence du forward est supposé un libor par commodité de présentation, mais ce choix est sans importance. La société du trésorier, de notation supérieure ou dite *premier nom* — une hypothèse de commodité et sans incidence sur le fond — , place et emprunte habituellement à $i_{1,b}^{1T}$ et $i_{1,a}^{1T}$.

En t le FRA est coté [FRA_b : FRA_a]. En T_1 le libor officiel ressort à $lib_{1,a}^{1T} = i_{1,a}^{1T} + \mu_{off}$.



actions	flux
en T_1	
emprunte à $i_{1,a}^{1T}$	100
règle le FRA:	$\frac{100(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off}-FRA_a)d_{1T}}{1+(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})d_{1T}}$

place à $i^{1T}_{1,b}$ si règlement créditeur refinance à $i^{1T}_{1,a}$ si règlement débiteur	$-\dfrac{100(i^{1T}_{1,a}+\mu_{off}-FRA_a)d_{1T}}{1+(i^{1T}_{1,a}+\mu_{off})d_{1T}}$
solde	100
en T	
rembourse	$-100(1+i^{1T}_{1,a}\,d_{1T})$
récupère placement si règlement créditeur	$100\,(i^{1T}_{1,a}+\mu_{off}-FRA_a)\,d_{1T}\,\dfrac{1+i^{1T}_{\mathbf{1,b}}\,d_{1T}}{1+(i^{1T}_{1,a}+\mu_{off})d_{1T}}$
rembourse emprunt si règlement débiteur	$100\,(i^{1T}_{1,a}+\mu_{off}-FRA_a)\,d_{1T}\,\dfrac{1+i^{1T}_{\mathbf{1,a}}\,d_{1T}}{1+(i^{1T}_{1,a}+\mu_{off})d_{1T}}$
solde	$\approx -100\mathbf{(}1+(FRA_a-\mu_{off})\,d_{1T}\mathbf{)}$

Le trésorier emprunte à un taux effectif approximativement égal au taux contractuel FRA_a. C'est la raison pour laquelle nous disons que le FRA est un contrat sur-mesure pour un emprunteur.

Plus précisément il est *presque* sur-mesure, où ''presque'' reflète l'approximation $[1+i^{1T}_{1,b\,/\,a}d_{1T}]\big/[1+(i^{1T}_{a}+\mu_{off})d_{1T}]\approx 1$.

L'actualisation de l'échange $lib^{1T}_{1,a}-FRA_a$ au taux libor officiel $lib^{1T}_{1,a}=i^{1T}_{1,a}+\mu_{off}$ prend tout son sens sur cette formalisation. En plaçant à libid ou refinançant à libor *opérationnel* le règlement, le trésorier fait presque disparaître le coefficient d'actualisation et paye effectivement FRA_a net d'une marge (égale à μ_{off} avec l'hypothèse de *premier nom*). Sans l'actualisation, il paierait non seulement FRA_a moins marge, mais aussi des termes d'intérêt croisés qui viendraient complexifier son analyse et ralentir sa prise de décision.

V.2 Sous-jacent implicite

Le FRA vient d'apparaître simple et tangible pour un trésorier emprunteur. La contrepartie de sa spécialisation est qu'il va éprouver quelque difficulté à s'insérer dans le cadre général de l'arbitragiste.

Nous exposons sur la page ci-après un parallèle faisant ressortir que le FRA peut s'interpréter comme un contrat forward F portant sur un actif U qui se révèle un certificat de dépôt.

V.2.1 Arbitrage classique du FRA et arbitrage équivalent

Arbitrage classique du FRA offert par prêt-emprunt (2 prêts & 1 emprunt)

actions	flux
en t	
emprunte à i_a^T sur [t : T]	$\frac{100}{1+i_b^1 d_1}$
prête à i_b^1 sur [t : T₁]	$-\frac{100}{1+i_b^1 d_1}$
vend FRA à FRA_b	
solde	0
en T_1	
récupère prêt	100
règle le FRA	$100\,\frac{FRA_b-(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})}{1+(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})d_{1T}}\,d_{1T}$
prête à $i_{1,b}^{1T}$ et sur [T_1 - T]	$-100\left[1+\frac{FRA_b-(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})}{1+(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})d_{1T}}\,d_{1T}\right]$
solde	0
en T	
rembourse emprunt	$-\frac{100}{1+i_b^1 d_1}(1+i_a^T d_T)$
récupère	$100\left[1+\frac{FRA_b-(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})}{1+(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})d_{1T}}\,d_{1T}\right](1+i_{1,b}^{1T}\,d_{1T})$
solde	S_{PE}^T

Arbitrage équivalent du FRA offert par certificats de dépôt

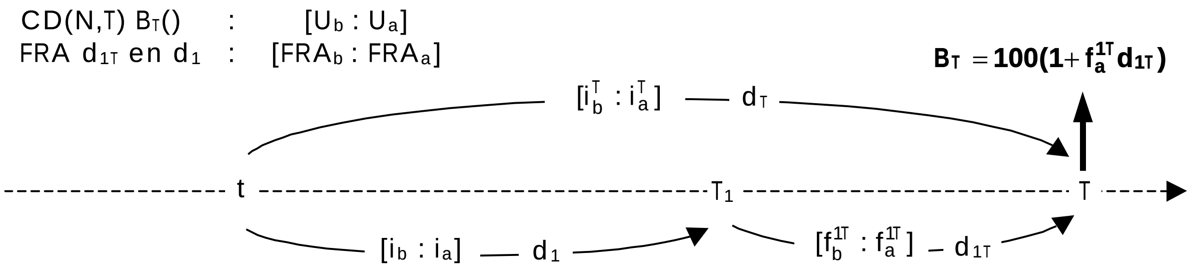
actions	flux
en t	
se fait prêter CD(N,T)	
vend CD à i_a^T	$\frac{N}{1+i_a^T d_T}=\frac{100}{1+i_b^1 d_1}$
place $\frac{N}{1+i_a^T d_T}$ à i_b^1 sur [t : T_1]	$-\frac{100}{1+i_b^1 d_1}$
vend FRA à FRA_b	
solde	0

$N = 100\,(1+i_a^T d_T)/(1+i_b^1 d_1) \equiv 100\,(1+f_a^{1T} d_T)$

actions	flux
en T_1	
récupère placement	100
règle le FRA	$100\,\frac{FRA_b-(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})}{1+(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})d_{1T}}\,d_{1T}$
rachète CD	$-\frac{N}{1+i_{1,b}^{1T}\,d_{1T}}$
restitue CD au prêteur	
solde	S_{CD}^1

(L'arbitrage est un reverse: $S_{CD}^1 = S_{RCC}$)

L'arbitrage courant d'un taux de FRA, qui fait intervenir un prêt-emprunt interbancaire, ne rentre pas dans notre cadre général de coût de portage car aucun sous-jacent ne se distingue nettement — est-ce le prêt, est-ce l'emprunt ? — et le solde de l'opération ne coïncide pas avec l'échéance du FRA.



En revanche l'arbitrage parallèle sur un CD de nominal $N = 100(1+f_a^{1T} d_T)$ et de maturité dépassant de d_{1T} = n-mois l'échéance du FRA dit ''d_{1T} en d_1'' se rapproche du reverse cash and carry du cadre général. Notons que $U_b = N/(1+i_a^T d_T) = \dfrac{100}{1+i_b^1 d_1}$.

Cependant deux caractéristiques doivent encore être vérifiées:

(1) le FRA peut-il s'exprimer en cours, comme un contrat F, et non plus en taux ?

(2) le solde d'arbitrage en T_1 est-il déterministe, c'est-à-dire connu en date t ?

La question (1) bénéficie du travail précédent sur le future eurodollar. Le taux FRA_b est le taux implicite d'un contrat coté en taux d'escompte: $F_a = 100(1–FRA_b d_{1T})$, et le contrat F sera alors *acheté*.

La question (2) trouve une réponse dans ce qui suit.

Le solde d'arbitrage courant S_{PE}^{T}, en date T, et le solde par CD, en date T_1, s'écrivent:

$$
\left\{
\begin{aligned}
S_{PE}^{T} &= 100\left[1+\frac{FRA_b-(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})}{1+(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})d_{1T}}d_{1T}\right](1+i_{1,b}^{1T}d_{1T}) - \frac{100}{1+i_b^{1}d_1}(1+i_a^{T}d_T)\\
&= 100\left[\frac{1+i_{1,b}^{1T}d_{1T}}{1+(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})d_{1T}}(1+FRA_b d_{1T}) - (1+f_a^{1T}d_{1T})\right]\\
&= 100\,(FRA_b - f_a^{1T})d_{1T} - 100(sp\,d_1(i)+\mu_{off})d_{1T} + \Delta\Lambda_T^{RCC} \quad \text{avec } \Delta\Lambda_T^{RCC} = \overbrace{\frac{(sp\,d_1(i)+\mu_{off})(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off}-FRA_b)}{1+(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})d_{1T}}d_{1T}^{2}}^{\text{écart d'imperfection de linéarisation du FRA en RCC}}\\
S_{CD}^{1} &= 100 - \frac{N}{1+i_{1,b}^{1T}d_{1T}} + 100\,\frac{FRA_b-(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})}{1+(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})d_{1T}}d_{1T}\\
&= \frac{100}{1+i_{1,b}^{1T}d_{1T}}\left[\frac{1+i_{1,b}^{1T}d_{1T}}{1+(i_{1,a}^{1T}+\mu_{off})d_{1T}}(1+FRA_b d_{1T}) - (1+f_a^{1T}d_{1T})\right] = \frac{S_{PE}^{T}}{1+i_{1,b}^{1T}d_{1T}}
\end{aligned}
\right.
$$

Le solde d'arbitrage par prêt-emprunt ressemble en tout point, *sauf en un seul*, au solde du <u>reverse</u> sur le contrat eurodollar future obtenu page 27 — en négligeant les *écarts DI et DL* d'imperfections de linéarisation — :

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\text{FRA:} & S_{PE}^{T} = 100\,(FRA_b - f_a^{1T})d_{1T} & - \; 100(sp\,d_1(i)+\mu_{off})d_{1T}\\
\text{future eurodollar:} & S_{RCC}^{1} = 100\,(\partial_b - f_a^{1T})\,d_{1T} & - \; 100(sp\,d_1(i)+\mu_{off})d_{1T}
\end{array}
\right.
$$

Le seul point de différence est la <u>date du solde</u>: sur le future, le solde est en date T_1, et sur le forward, il est en date T.

Nous pourrions à ce stade nous contenter de considérer que le FRA de taux est un contrat forward général F portant sur le même certificat de dépôt que celui du future eurodollar n-mois homologue, mais dont le règlement financier est différé de n-mois.

Cependant ce raccourci n'est pas rigoureux sur le plan financier car n-mois d'intérêt nul ne manqueraient pas d'être exploités et finalement d'altérer les soldes d'arbitrage que nous avons établis.

V.2.2 Mise en évidence

Bien que long à présenter, le parallèle précédent avec un arbitrage impliquant un CD particulier va résoudre cette difficulté de façon satisfaisante.

Nous remarquons en effet que le solde d'arbitrage classique est égal à *une valeur future* de son homologue avec CD, puisque par construction $S_{PE}^{T} = (1+i_{1,b}^{1T}d_{1T})\,S_{CD}^{1}$, et que cette valeur future est quasi-pertinente car le taux employé est interbancaire (ceci pour la pertinence) mais il est toujours un bid (cela pour le quasi) que S^1_{CD} soit créditeur ou débiteur.

Cette dernière entorse à la valeur future tient à ce que le FRA fait appel à un taux de référence offert, que son usage soit destiné à un prêt (qui réclame un bid) ou à un emprunt.

A ce détail près inhérent à la structure du FRA, un constat s'impose: les deux soldes sont équivalents. En conséquence,

L'arbitrage courant par prêt-emprunt revient à un arbitrage sur un contrat forward coté en taux d'escompte, dont le taux implicite est le taux à n-mois offert du FRA, et dont le sous-jacent est un certificat de dépôt de maturité égale à l'échéance du FRA plus n-mois, et de nominal égal à celui du contrat accru d'intérêt forward sur n-mois.

V.3 Remarques

V.3.1 Imperfections supplémentaires

Malgré le résultat qui vient d'être énoncé, le FRA soulève deux difficultés d'insertion dans notre cadre général autres que celles posées pas le future eurodollar. En voici le rapide exposé.

Aléa sur l'amplitude du solde d'arbitrage

Le solde d'arbitrage S^1_{CD} est entaché d'une nouvelle imperfection en la présence du facteur d'actualisation $1/(1+i^{1T}_{1,b}\,d_{1T})$. Cette imperfection n'est pas de pure forme, mais affecte, à travers la variable $i^{1T}_{1,b}$, le critère de déterminisme au coeur du cadre général de l'arbitrage pur.

Néanmoins l'aléa importé par le facteur d'actualisation ne modifie que l'amplitude du solde et non son signe, c'est à dire son caractère de gain ou de perte, qui est l'aspect essentiel d'un arbitrage.

Deux nominaux pour le sous-jacent implicite

Le *nominal* du certificat de dépôt adopté dans le parallèle est spécifique au type de l'arbitrage. Celui-ci s'étant révélé un reverse et $100(1+f^{1T}_a\,d_T)$ ayant été choisi pour nominal, la cash and carry semble devoir se construire avec l'achat d'un CD de nominal $100(1+f_b^{1T}d_T)$. La formalisation — non incluse par souci de concision, mais de même teneur que celle de la page 31 — montre que tel est bien le cas. Par conséquent notre parallèle n'est pas rigoureux puisque l'actif sous-jacent proposé change de forme selon que l'arbitrage est un cash and carry ou un reverse.

Heureusement les calculs, que nous ne détaillons pas ici afin de respecter une certaine densité, montrent que le choix d'un seul nominal — peu importe lequel — dans les deux types d'arbitrage n'entraine qu'un aléa négligeable. Par exemple, si le CD de nominal $100(1+f_a^{1T}d_T)$ est adopté dans un C&C, le solde d'arbitrage (en considérant pour simplifier que $\mu_{off} = 0$) est exactement égal à:

$$S_{CD}^{1,C\&C} = \frac{100}{1+i_{1,a}^{1T}d_{1T}}\left[(f_b^{1T} - FRA_a)d_{1T} + \upsilon\right] \quad \text{avec} \quad \upsilon = \frac{(f_a^{1T}-f_b^{1T})(f_b^{1T}-i_{1,a}^{1T})d_{1T}^2}{1+f_b^{1T}d_{1T}}$$

υ est l'aléa induit par le choix d'un nominal non conforme à notre théorie. Il est rendu aléatoire par la présence de $i_{1,a}^{1T}$. Il a la structure d'un terme croisé de différentiels d'intérêt, qui est négligeable devant le terme simple $(f_b^{1T} - FRA_a)d_{1T}$ sauf dans des cas peu réalistes.

Nous pourrions étendre le modèle de coût de portage pour accepter un sous-jacent U' en cash and carry différent de celui U'' du reverse. Cependant de telles différences alourdiraient les notations et ne serviraient qu'au cas spécifique du FRA, et il apparaît préférable d'accepter l'imperfection υ.

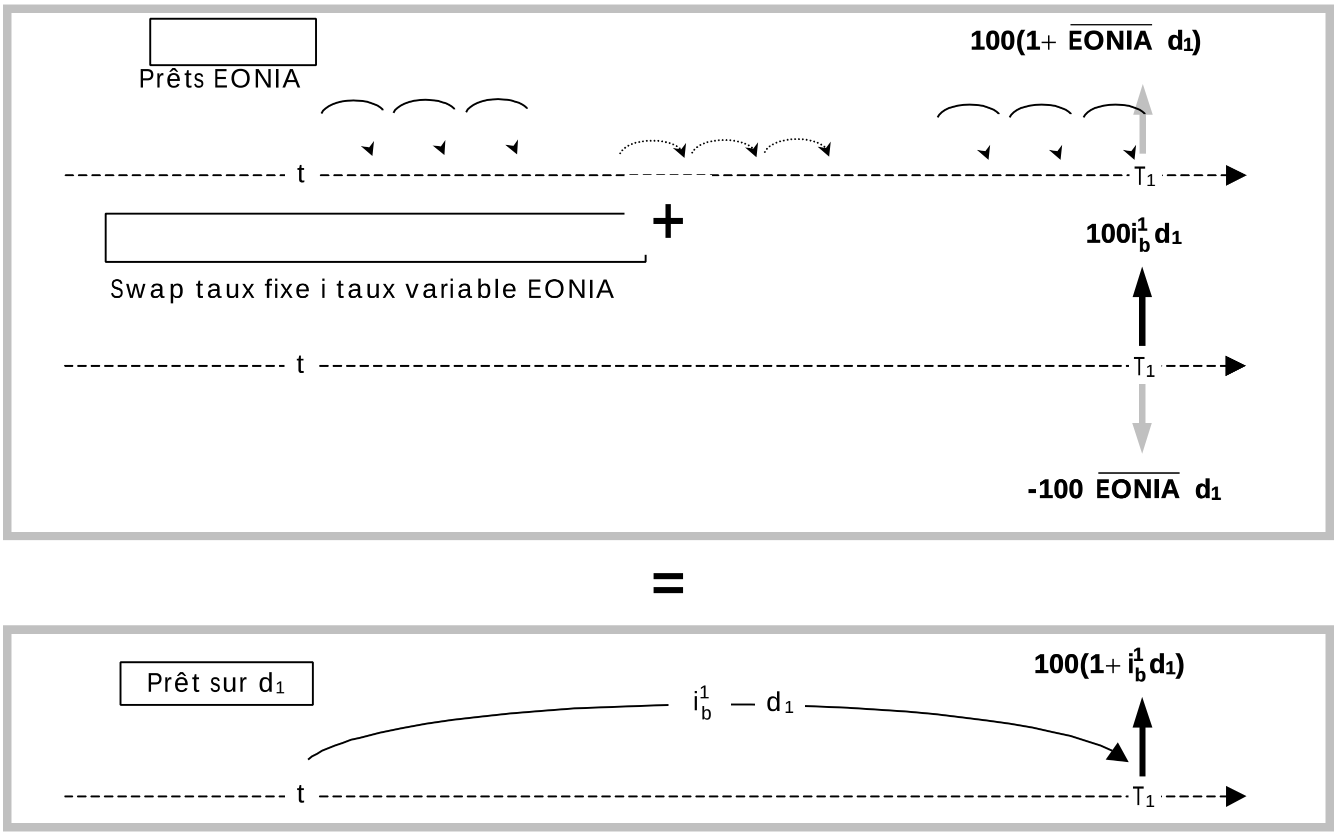
Néanmoins, si besoin est, dans la pratique les arbitragistes n'hésitent pas à différencier le sous-jacent suivant le sens de leur opération. Cela se traduit concrètement par deux hedge ratios distincts. La seule présence des fourchettes de marché peut conduire à un ratio de C&C différent de celui de RCC.

V.3.2 Prêts-emprunts et swaps

Une précision importante doit être émise à ce stade. Les prêts-emprunts sont depuis une quinzaine d'années supplantés par les swaps, instruments avérés plus flexibles (nominal et échéance), plus liquides et meilleur marché (bid-ask plus étroit). Comment un swap se substitue-t-il à un prêt ou à un emprunt ?

La réponse à cette question remplirait aisément un papier de recherche et nous éloignerait de nos propos. Nous en résumons très sommairement un élément essentiel adapté à nos besoins[20].

Un prêt à i_b^1 est identique au renouvellement d'un prêt au jour le jour *plus* l'achat d'un swap prêteur de taux variable contre taux fixe. Le taux variable du swap est le taux au jour le jour européen (Eonia), et le taux fixe est i_b^1. Nous représentons cette identité ci-dessous:



$\overline{\text{EONIA}}$ désigne la moyenne arithmétique des Eonias quotidiens. Ces schémas simples éludent la capitalisation des intérêts au jour le jour et la marge par rapport à Eonia du taux de prêt (en général négative de quelques bp).

Fort heureusement, à la différence des swaps T4M/TAM, les swaps Eonia capitalisent quotidiennement le taux variable et versent le taux fixe in fine sur le court-terme, et annuellement sur le moyen-long terme. Leurs taux fixes sont donc utilisables en face des prêts et des emprunts au jour le jour moyennant deux ajustements minimes[21]:

- l'incorporation de la marge sur Eonia du prêt et de l'emprunt

---

[20] Pour un approndissement se reporter à ''Les Swaps'', Christophe Chazot et Patrick Claude, Economica, 1994.

[21] Un exemple d'arbitrage par swaps est décrit dans ''The futures markets'', chapitre 10, pages 472-480, Daniel R. Siegel, Diane F. Siegel, Probus Publishing Company, 1990.

- la substitution des taux fixes actuariels par les taux zéro-coupon implicites.

Un élément extrêmement favorable au développement simultané des swaps et des arbitrages purs tient à l'*occultation des opérations au jour le jour*. En effet, si dans le parallèle de la page 31, les deux prêts et l'emprunt interbancaires ''longs'' sont remplacés par deux swaps prêteurs et un swap emprunteur (de taux fixe), les deux prêts et l'emprunt *au jour le jour* impliqués par l'identité précédente se compensent presque totalement, et ne nécessitent en pratique qu'un règlement final mineur.

Sur les taux court-terme, l'arbitragiste raisonne donc en termes de swaps et non en termes de prêts-emprunts.

VI CONTRAT SUR DEVISE

Comme pour les taux courts, les contrats sur taux de change pose la question du sous-jacent. Est-il l'une des deux devises d'un taux de change ? Et si cela était, laquelle choisir ?

Dans son ouvrage ''Understanding futures markets'' Robert Kolb rapproche les arbitrages purs sur le change de ceux effectués sur des actifs libellés en une seule devise[22]. Mais il procède sans démonstration, en stipulant l'égalité de deux formules classiques du cours à terme; de surcroît ces formules sont relatives à un contexte non-réaliste d'absence de fourchette de marché.

Cette partie répond directement à ces questions. Elle montre que le sous-jacent d'un forward ou d'un future sur devise est un certificat de dépôt émis en cette devise et de maturité coïncidant avec l'échéance du contrat.

VI.1 Forward outright et currency future

Il y eut environ 3 milliards de dollars de volume quotidien sur les marchés de change mondiaux en 1992. Aux USA, 51% le fut en transactions spot, et 32% en swaps cambistes — en Anglais currency swaps — . D'autres transactions de change à terme que nous allons préciser, Les *forward outright* f/x trades, représentèrent 5% du volume quotidien. Avec les options sur ces trois produits capitalisant un autre 8%, le marché interbancaire comptabilise 96% de l'activité.

---

[22] ''Understanding futures markets'', pages 510 à 513, Robert W. Kolb, New York Institute of Finance, 3rd Edition.

Les 4% restant se divisent en futures et options négociés sur les marchés organisés. Cela est peu, mais peut-être faut-il écouter l'un des arguments des Echanges[23], selon lequel leurs produits ne sont en compétition qu'avec 13% du marché de gré à gré: 8% pour les options, et 5% pour les forward outright qui rivalisent avec les futures.

Un rapide tour de définitions s'impose avant de formaliser les arbitrages purs sur le change.

➊ Spot

Sur le change, une transaction *spot* est un accord entre deux contreparties, l'une pour réaliser la vente d'une première devise et l'achat simultané d'une seconde, l'autre pour réaliser l'inverse. La date de valeur du spot est typiquement J+2, où J est la date d'opération. Dans notre cadre général, nous assimilons les deux dates (J).

➋ Forward outright

Une transaction **forward outright** est identique à une transaction spot, sauf sur un point: la date de valeur est supérieure à J+2, et déterminée par les deux contreparties.

Dans notre cadre général, le spot se règle en J, le forward outright en J+n, n > 0.

➌ Currency swap

Une première devise peut être vendue (achetée) spot et simultanément achetée (vendue), pour un même montant, en forward outright. Cette transaction est appelée *currency swap*. La seconde devise est achetée (vendue) spot et vendue (achetée) forward outright, mais pour des montants inégaux. La devise dont le montant est identique est dite *base currency* — devise directrice — .

Dans un currency swap, les devises changent de mains en J, puis rechangent de mains en J+n.

➍ Currency forward

Le FRA, le contrat forward de taux court par excellence, n'a-t-il pas un homologue sur le change aussi ? Un contrat forward de change qui proposerait un échange à sa seule échéance (J+n), et qui soit aussi reconnu et utilisé que le FRA ?

La réponse est négative. En effet, l'instrument de change homogène au FRA est le *currency forward outright* qui vient d'être évoqué, mais son emploi reste limité (5% du volume total).

Par ailleurs, le currency forward existe bel et bien mais il est un autre nom pour désigner le

---

[23] ''An introduction to interbank foreign exchange and rolling spot'', James W. Slentz, Chicago Mercantile

currency swap vu plus haut, qui lui réalise deux échanges, l'un en J, l'autre en J+n. L'encart ci-dessous illustre nos propos[24].

Encart extrait de Les Swaps par Chazot et Claude.

Un contrat de forward est composé de deux opérations de change de sens inverse conclues avec la même contrepartie: l'une est effectuée au comptant (départ spot), l'autre est à terme (en valeur future). Un forward, fréquemment appelé ''swap'' par les professionnels du marché des changes, fait partie de la famille des swaps.

Exemple:

Considérons un forward USD/FRF emprunteur de un million de dollars, négocié le 10/02/93 avec un cours de change comptant de 5.5650 et un report de 1250 points pour une maturité de trois mois (échéance le 10/05/93). Le cours à terme est de 5.69 francs pour un dollar. Les flux … sont présentés dans le tableau suivant:

Date	Flux en FRF	Flux en USD
10/02/93	–5 565 000	1 000 000
10/05/93	5 690 000	–1 000 000

❺ <u>Currency future</u>

Les futures de devise sont négociés sur le Chicago Mercantile Exchange (depuis 1972). Ils se comparent aux contrats forward outright de l'OTC, dans le sens où ils donnent lieu à une absence de flux à la date de transaction (J), et compte tenu de notre hypothèse d'appel de marge terminal, à un *flux unique à l'échéance* (J+n). Tous deux se règlent par *livraison* de la ''base currency'' dans un montant prédéfini ou standardisé.

L'encart suivant est un exemple de transaction sur currency future[25]:

Encart extrait de Comparing Futures and Forwards par I. Kawaller.

Perfect Long Futures Hedge

Size exposed to the risk of strengthening pound sterling: £62,500

Hedge Instrument: 1 long futures contract

Exchange, Mai 1993.

[24] ''Les Swaps'', pp 302 et 308, Christophe Chazot et Patrick Claude, Economica, 1994.

[25] ''Comparing Futures and Forwards for Managing Currency Exposures'', Ira G. Kawaller, Open Interest, Chicago Mercantile Exchange, Juillet 1996.

Exchange Rate Data

	Initiation of hedge	Liquidation of hedge
Transaction date	March 1	June 15
Spot value date	March 3	June 17
Futures delivery date	June 17	June 17
Spot price ($/FX)	$1.5120	$1.5876
Futures price	$1.5070	$1.5876

RESULTS

Dollars paid for £62,500 on June 17: £62,500 x $1.5876/£ = $99,225.00

Hedge result: £62,500 x ($1.5876/£ – $1.5070/£) = $5,037.50

Dans ce cas d'école qu'est la couverture parfaite — perfect long futures hedge —, l'achat du contrat sterling donne lieu le 17 juin à réception du montant standard du contrat, £65 000, contre livraison de $99 225 – $5 037.50 = $94 187.50. La livre joue le rôle de devise directrice.

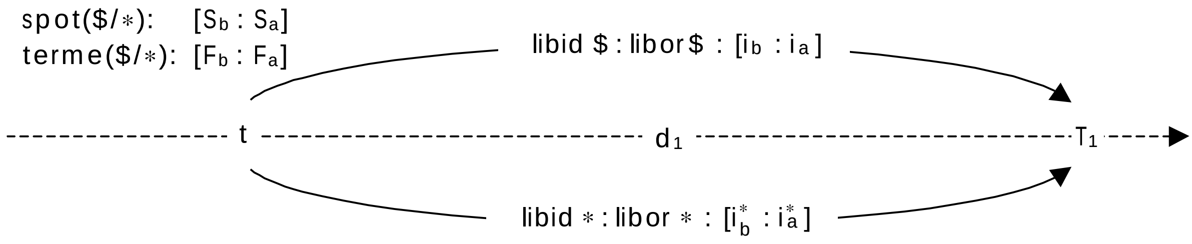
Nous gardons à l'esprit ces dernières caractéristiques pour aborder la formalisation des arbitrages purs sur future ou forward outright.

VI.2 Forward ou future sur certificat de dépôt étranger

Forward outright et future sont maintenant confondus en un contrat sur devise F, coté $[F_b : F_a]$. Le point de vue de l'arbitrage va guider la mise en évidence du sous-jacent effectif du contrat F. Nous supposons que l'opérateur en action ci-après bénéficie des conditions interbancaires; il est clair que des conditions moins avantageuses modifieraient le sous-jacent.

En conformité avec la finance internationale académique, l'arbitragiste domestique est un résident américain dont les soldes d'opération sont libellés en dollars ($), et la devise étrangère est notée $*$. L'achat du contrat F est une obligation de prendre réception de $*1$ et de livrer $F en T_1. La base currency est donc $*$. Le montant nominal — les £65 000 de l'encart précédent — est unitaire, ce qui permettra de rapprocher directement F de la notion de taux de change à terme.

VI.2.1 Cash and carry



L'arbitragiste considère le contrat comme portant sur U, **euro-certificat de dépôt** rapportant ∗1 en T_1 et réévalué en $[26] .

En t, U est coté $U_b = S_b \frac{1}{1+i^*_a d_1}$ et $U_a = S_a \frac{1}{1+i^*_b d_1}$.

i^*_b et i^*_a sont des taux euro-∗, donc libid ∗ et libor ∗.

__**Déroulement**__

<u>actions</u>	<u>flux</u>	
en t		
emprunte en \$ à i_a	$S_a \frac{1}{1+i^*_b d_1}$ \$	
achète en ∗ l'euro-CD	$-S_a \frac{1}{1+i^*_b d_1}$ \$	équivalent d'un prêt
vend ∗1 à terme à F_b	—	
	0	
en T_1		
rembourse	$-S_a \frac{1+i_a d_1}{1+i^*_b d_1}$ \$	
''revend'' l'euro-CD arrivé à maturité	1∗	
livre ∗1	-1∗	

[26] L'habitat monétaire de l'arbitragiste est le dollar. L'arbitragiste n'est pas une firme multinationale optimisant ses flux de devises.

reçoit $\$F_b$ — F_b \$

$S_1 = F_b - S_a \frac{1+i_a d_1}{1+i_b^* d_1}$ en \$

■■ $S_a \frac{1+i_a d_1}{1+i_b^* d_1}$

est la traditionnelle formule du taux de change à terme que les banques construisent par la classique *boucle de change* à Londres. Nous donnons un exemple de boucle — mais d'arbitrage et non de vente de change à terme par une banque — ci-après.

■■ Le taux de change à terme est également noté

$$S_a + S_a \frac{(i_a - i_b^*) d_1}{1+i_b^* d_1}$$

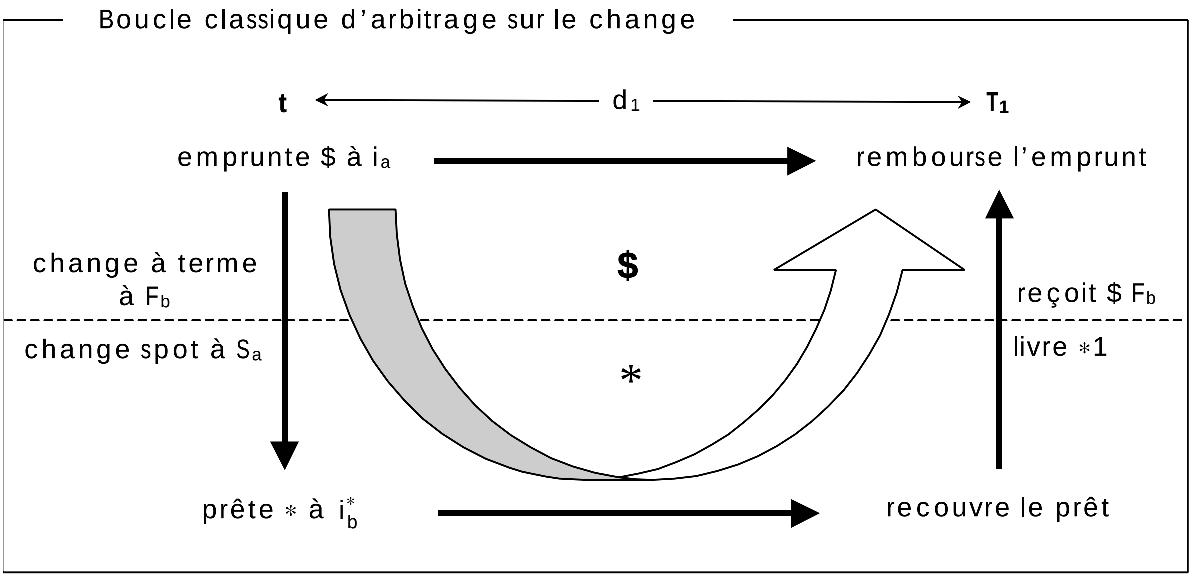
où $S_a \frac{(i_a - i_b^*) d_1}{1+i_b^* d_1}$ est appelé *report* ou *déport* selon que son signe est positif ou négatif.

L'arbitragiste compare donc le cours bid du contrat F à ce taux de change, et s'il lui est supérieur, réalise les opérations décrites plus haut.

Boucle de change équivalente

Lorsqu'ils présentent l'arbitrage sur le change, théoriciens et praticiens ont recours à une *boucle d'arbitrage* invoquant un *prêt-emprunt* .

La boucle classique de la page suivante et le cash and carry que nous avons exposé juste avant sont totalement compatibles. En effet, des calculs sans difficulté montrent que le solde d'opération en T_1 de cette boucle est en tout point identique au solde S_1 de C&C, obtenu par un arbitragiste qui assimile F à un contrat sur euro-CD de maturité T_1.



VI.2.2 Reverse

<u>actions</u>	<u>flux</u>
en t	
se fait prêter un euro-CD rapportant ∗1 en T_1	
vend en $ l'euro-CD	$S_b \dfrac{1}{1+i_a^* d_1}$ $ } équivalent d'un emprunt
place en $ à i_b	$-S_b \dfrac{1}{1+i_a^* d_1}$ $
achète ∗1 à F_a	—
	0
en T_1	
''rachète'' l'euro-CD arrivé à maturité	-1 ∗
restitue l'euro-CD	—
récupère	$S_b \dfrac{1+i_b d_1}{1+i_a^* d_1}$ $
reçoit ∗1	1 ∗
livre $$F_a$	$-F_a$ $
	$S_1 = -F_a + S_b \dfrac{1+i_b d_1}{1+i_a^* d_1}$

■■ $S_b \frac{1+i_b d_1}{1+i_a^* d_1} = S_b + S_b \frac{(i_b - i_a^*) d_1}{1+i_a^* d_1}$

est le taux de change à terme demandé (bid) — le précédent était offert — qu'une banque élabore classiquement à l'aide d'une boucle de change. L'arbitragiste compare le cours ask du contrat F à ce taux, et s'il lui est inférieur, réalise les opérations qui viennent d'être mises à plat.

■■ Similairement au cash and carry, il existe une *boucle d'arbitrage avec prêt-emprunt* qui correspond au reverse que nous venons d'exposer, et dont le solde à l'échéance est identique à celui de l'arbitrage pur.

Comme pour les contrats de taux, il n'est pas nécessaire de convaincre les opérateurs d'abandonner les prêt-emprunts et d'utiliser des certificats de dépôt pour pouvoir affirmer que les contrats sur devise entrent dans notre cadre général. En effet, dans la pratique c'est *implicitement* que les marchés utilisent l'euro-CD que nous avons décrit. Notre cadre général accepte donc indirectement les contrats sur devise.

VII CONCLUSIONS

VII.1 Certificats de dépôt implicites

Nous avons montré dans les parties **IV**, **V** et **VI** que les futures eurodollar et les FRAs portent sur des **certificats de dépôt implicites** qui leur permettent de s'inscrire dans notre cadre général. Ces contrats supportent l'imperfection de règlement cash et l'imperfection de linéarisation.

Ces imperfections modifient peu les soldes d'arbitrage du cadre général puisqu'il suffit de leur adjoindre deux termes **additifs** d'imperfection.

Par exemple, dans le cas d'un future de type eurodollar n-mois, cela donne:

$$\begin{cases} S^1_{C\&C} = F_b - \dfrac{100}{1+f_b^{1T} d_{1T}} + 100\lambda_1(i) + 100\,\mu_{off}\, d_{1T} \\ S^1_{RCC} = -(F_a - \dfrac{100}{1+f_a^{1T} d_{1T}}) - 100\lambda_1(i) - 100\,(spd_1(i)+\mu_{off})d_{1T} \end{cases}$$

où λ_1 désigne l'erreur de linéarisation matérialisée à l'échéance T_1 du future, et les termes à sa droite recouvrent l'imperfection de règlement cash.

Enfin précisons que le 3 month T-Bill future du CME ne connaît d'imperfection ni de linéarisation, ni de règlement cash.

VII.2 Arbitrage terme-terme sur les taux courts

λ (future) a été mesuré précisément et peut se révéler non négligeable dans un solde d'arbitrage exprimé selon notre cadre général. En revanche, lorsque le taux implicite du future est introduit, λ n'apparaît plus que sous forme d'écart Δ, dont la mesure s'avère souvent négligeable:

$$\begin{cases} S^1_{C\&C} = +\,100\,(f^{1T}_b - \partial_a)\,d_{1T} \;+\; 100\,\mu_{off}\,d_{1T} \;+\; \Delta\lambda_{C\&C} \\ S^1_{RCC} = +\,100\,(\partial_b - f^{1T}_a)\,d_{1T} \;-\; 100\,(sp\,d_1(i)+\mu_{off})\,d_{1T} \;+\; \Delta\lambda_{RCC} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \Delta\lambda_{C\&C} = -\,\lambda_t(f^{1T}_b) + \lambda_1(i^{1T}_{1,a}) \\ \Delta\lambda_{RCC} = \lambda_t(f^{1T}_a) - \lambda_1(i^{1T}_{1,b}) \end{cases}$$

Λ (FRA) n'a pas été explicité et mesuré, mais son apparition sous forme de différentiel $\Delta\Lambda$, également négligeable, suffit à notre travail:

$$\begin{cases} S^1_{C\&C} = \dfrac{100}{1+i^{1T}_{1,a}\,d_{1T}} \left[(f^{1T}_b - FRA_a)\,d_{1T} \;+\; 100\,sp\,d_1(i)\,d_{1T} \;+\; \Delta\Lambda^{C\&C}_T \right] \\ S^1_{RCC} = \dfrac{100}{1+i^{1T}_{1,b}\,d_{1T}} \left[(FRA_b - f^{1T}_a)\,d_{1T} \;-\; 100\,(sp\,d_1(i)+\mu_{off})\,d_{1T} \;+\; \Delta\Lambda^{RCC}_T \right] \end{cases}$$

Un résultat analogue a été présenté page 18 pour le future sur bon du gouvernement américain à 3 mois.

Cette expression des soldes d'arbitrage sur les contrats de taux courts a le mérite de la clarté. Mettant de côté les imperfections discutées plus haut, nous constatons que l'arbitrage pur, couramment dénommé ''comptant-terme'', est sur le fond un **arbitrage terme-terme**, qui oppose:

future sur Tbill	le taux d'escompte implicite du future à un taux forward implicite à la courbe des taux des bons du Trésor,
future eurodollar	le taux d'escompte implicite du future à un taux forward implicite à la courbe des taux interbancaire,
FRA	le taux du FRA à un taux forward implicite à la courbe des taux interbancaire.

Enfin, signalons à ce stade un point qui ne manquerait pas d'inquiéter l'arbitragiste qui nous lirait: les soldes opposent précisément des taux à terme *offerts* (ask) à des taux à terme *demandés* (bid), et *le spread est toujours au détriment de l'arbitrage*.

VII.3 Un cadre unifié d'analyse

Nous venons de montrer dans ce papier que les principaux contrats à terme, forward ou future, donnent lieu à des cash and carry et reverse dont les soldes à l'échéance peuvent toujours s'écrire:

$$\begin{cases} S_1^{C\&C} = F_b - U_a(1+ i_a d_1) + r_h U_a (1+ f_b\, d_{\tau 1}) + \text{imperfections de règlement cash et de linéarisation} \\ S_1^{RCC} = -F_a + U_b(1+ i_b d_1) - r_s U_b(1+ f_a\, d_{\tau 1}) + \text{imperfections de règlement cash et de linéarisation} \\ \text{où } U \text{ est un sous-jacent explicite ou implicite.} \end{cases}$$

Les imperfections citées dans les deux identités sont des variables aléatoires qui rendent les arbitrages risqués.

Un travail de recherche sur les contrats à terme financiers pourra néanmoins, par souci de clarté, ne pas reconduire les deux imperfections et adopter les soldes déterministes:

$$\begin{cases} S_{C\&C} = F_b - U_a\,(1+ i_a\, d_1) + r_h\, U_a\,(1+ f_b\, d_{\tau 1}) \\ S_{RCC} = -F_a + U_b\,(1+ i_b\, d_1) - r_s\, U_b\,(1+ f_a\, d_{\tau 1}) \end{cases}$$

Il conviendra cependant de garder à l'esprit que ces imperfections peuvent se révéler non négligeables dans des arbitrages initiés très près de leurs points morts déterministes. Il sera alors prudent de rajouter une prime de risque à chacun des deux soldes.

Moyennant ces approximations et précautions, tout future et tout forward peut s'analyser dans le cadre général, simple et réaliste présenté en première partie de ce papier de recherche, et qui se résume essentiellement en un modèle de type Cost of Carry prenant en compte les coûts de transaction inhérents aux marchés financiers.

VIII REFERENCES

Michael J. Brennan et Eduardo S. Schwartz, ''Arbitrage in stock index futures'', Journal of Business, volume 63, 1990.

Chicago Board of Trade (CBOT), ''Treasury Futures for Institutional Investors'', 1990.

Christophe Chazot et Patrick Claude, ''Les Swaps'', Economica, 1994.

Bradford Cornell et Marc R. Reinganum, ‘‘Forward and futures prices: evidence from the foreign exchange markets’’, The Journal of Finance, Décembre 1981.

Gilles Desvilles, ‘‘Arbitrage sur les marchés à terme’’, Thèse de doctorat, Mars 1998.

Gilles Desvilles, ‘‘Contrat pibor: taux à terme et tension monétaire’’, Banque et Marchés, Mars-Avril 1997.

Gilles Desvilles, ‘‘Quelle prime pour le strip pibor ?’’, Libre Echange, Matif SA, Juin 1995.

Gerald D. Gay et Steven Manaster, ‘‘The quality option implicit in futures contracts’’, Journal of Financial Economics, volume 13, 1984.

Robert W. Kolb, ‘‘Understanding futures markets’’, Scott, Foresman, 1985 et New York Institute of Finance, 3rd Edition.

Edouard Macko et Philippe Cahen, ‘‘Contrat bon du Trésor ou contrat pibor ?’’, La Revue Banque, Avril 1988.

Matif SA, Direction Centrale de la Recherche et du Marketing, ‘‘Le contrat à terme sur l’indice CAC 40’’, 1989.

Daniel R. Siegel, Diane F. Siegel, ‘‘The futures markets’’, Probus Publishing Company, 1990.

Société Générale, ‘‘FRA’’, Les cahiers des marchés obligataires, 1990.